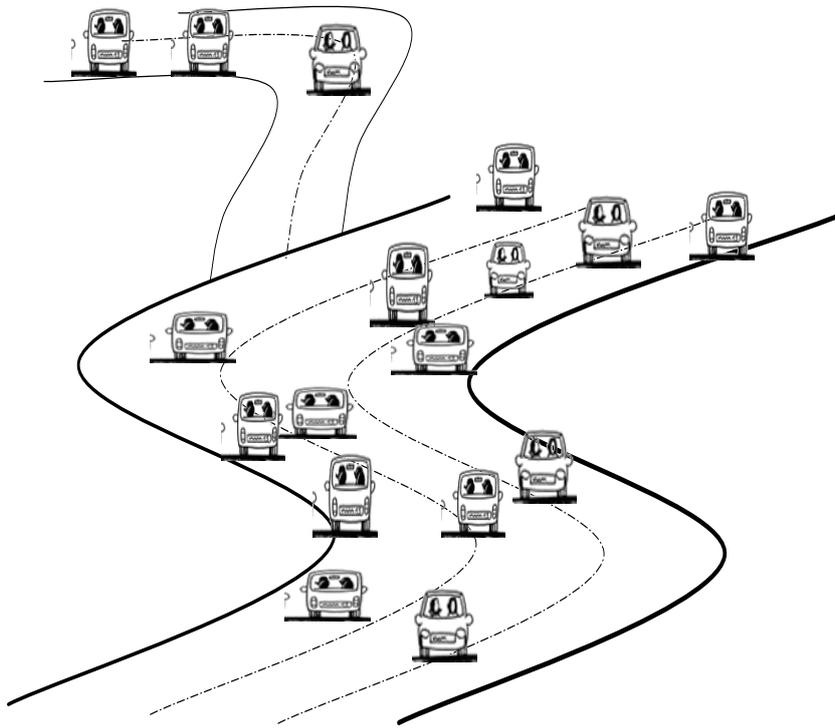




**La raison du plus fort est toujours le meilleur**  
**« Le loup et l'agneau »**



**à mes parents ...,**

# Remerciements

Cette page est dédiée à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail de thèse.

Tout d'abord, je tiens à adresser un remerciement tout particulier à Professeur Daniel Jolly, et à Professeur Emil Nikolov, directeurs de cette thèse, pour m'avoir donné le goût à la recherche, pour leur disponibilité, pour m'avoir encadré, conseillé et encouragé tout au long de la thèse, sans lesquels ce travail n'aurait pu aboutir. Je veux particulièrement remercier à Monsieur Daniel Jolly pour sa farouche volonté de relire ma thèse au cours de sa rédaction, qui m'a permis d'améliorer grandement son contenu.

Je tiens également à exprimé ma profondeur gratitude à Maxime Wack, Maître de Conférence HDR à l'Université de Technologie de Belfort Montbéliard et Todor Stoilov, Professeur à l'Académie des Sciences de Bulgarie, pour pouvoir accepter cette charge consistant à rapporter ma thèse.

Mes remerciements vont également aux différents membres de jury et participant qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps pour s'intéresser à mon parcours scientifique.

Mes plus sincères remerciements vont à Gilles Goncalves, Professeur à l'Université d'Artois et Monsieur Hassane Abouaïssa qui ont enrichi ma formation. Ses discussions et commentaires auront été fort utiles.

Il me faut ensuite remercier à l'ensemble de mes collègues du LGI2A et ANP pour leur participation à l'ambiance riche et chaleureuse régnant au laboratoire, mention spéciale à Roman, Gildas, Alex, Hamid, Issam et Kamel. Je suis particulièrement reconnaissante à ceux qui m'ont permis, au cours de nos discussions, d'enrichir ma propre expérience scientifique, linguistique et culturelle.

Je remercie l'équipe du « bureau des boursiers » à l'Institut français de Sofia et à l'équipe de la SCD de Béthune sans lesquels je ne pourrais pas financer les séjours en France.

Enfin, merci à ma famille, en particulier mes parents et Kiku pour avoir été à mes côtés, pour m'avoir donné de forces, mais aussi et surtout pour avoir su me soutenir dans les moments de découragement pendant ces dernières années.

## ***TABLE DE MATIERES***

<b>Liste des paramètres et symboles</b>	<b>6</b>
<b>Liste des acronymes et abréviations</b>	<b>8</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>9</b>
<b>Table des schémas</b>	<b>9</b>
<b>Abstract</b>	<b>13</b>
<b>Résumé</b>	<b>14</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre. I. Etat de l'art sur les systèmes de flux de trafic routier</b>	<b>18</b>
<b>I.1. Etat de l'art sur les modèles de flux de trafic routier</b>	<b>18</b>
<b>I.2. Modèle macroscopique de 1er ordre LWR</b>	<b>23</b>
<b>I.3. Modèle mathématique du flux de trafic routier</b>	<b>25</b>
<b>I.4. Modèle macroscopique du 2ème ordre</b>	<b>27</b>
<b>I.5. Conclusions</b>	<b>30</b>
<b>Chapitre. II. Méthode de résolution des EDP – l'équation de LWR</b>	<b>32</b>
<b>II.1. Résolution des EDP – l'équation de LWR</b>	<b>33</b>
<b>II.2. Méthode de résolution par la fonction de Green</b>	<b>36</b>
<b>II.3. Validation des résultats</b>	<b>41</b>
<b>II.4. Exemple de simulation du modèle et étude du modèle LWR du flux de trafic</b>	<b>43</b>
<b>II.5. Conclusions</b>	<b>59</b>
<b>Chapitre. III. Stratégie des systèmes de commande</b>	<b>61</b>
<b>III.1. Introduction des systèmes de commande</b>	<b>61</b>
<b>III.2. Commandes numériques des processus – méthodes de commandes simples</b>	<b>63</b>
<b>III.3. Commandes numériques des processus – méthodes de commandes intégrées</b>	<b>66</b>
<b>III.4. Commande d'un processus distribué présenté par la fonction de transfert dans un système asservi</b>	<b>67</b>
<b>III.5. Principe de base de la Commande Robuste d'Ordre Non-Entière (CRONE)</b>	<b>75</b>

<b>III.6. Analyse et conclusions</b>	<b>80</b>
<b>Chapitre. IV. Application de la commande CRONE pour le contrôle des flux de trafic routiers</b>	<b>81</b>
<b>IV.1. Conception, critères et algorithmes d'un système de commande CRONE pour le modèle LWR du flux de trafic routier – description et analyse</b>	<b>82</b>
<b>IV.2. Application des commandes CRONE</b>	<b>91</b>
<b>IV.3. Schémas technologiques</b>	<b>96</b>
<b>IV.4. Résultats des simulations</b>	<b>97</b>
<b>IV.5. Conclusions</b>	<b>116</b>
<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
<b>Perspectives</b>	<b>117</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>120</b>
<b>Bibliographie de l'auteur</b>	<b>130</b>
<b>Annexes 1 Modélisation des flux de trafic routiers</b>	<b>131</b>
<b>Annexes 2 Méthodes de résolutions des modèles de flux de trafic routier</b>	<b>133</b>
<b>Annexes 3 Méthode de résolution des EDP par la méthode de la fonction de Green</b>	<b>141</b>
<b>Annexes 4 Stratégies de commandes</b>	<b>148</b>
<b>Annexes 5 Méthodes d'approximations rationnelles : d'un retard et d'un opérateur non-entier avec une fonction continue</b>	<b>151</b>
<b>Annexes 6 Commande Robuste d'Ordre Non-Entier (CRONE)</b>	<b>156</b>
<b>Annexes 7 Étapes de transformation d'un système de commande CRONE avec Smith prédiction et filtre de compensation vers une présentation classique</b>	<b>158</b>

# Liste des paramètres et des symboles

$\rho(x, t)$	- densité - nombre de véhicules présents dans une section de route donnée comprise entre $x$ et $x+dx$ à l'instant $t$
$\rho_{max}$	- densité maximale
$\rho_{cr}$	- densité critique
$q(x, t)$	- débit - nombre de véhicules qui passent en un point $x$ dans l'intervalle de temps compris entre $t$ et $t+dt$
$q_{max}$	- débit maximal, obtenu pour une valeur critique de la densité
$V(x, t)$	- vitesse moyenne du flot de véhicules
$V_f$	- vitesse libre du flot de véhicules
$o_{cr}$	- occupation critique de la route
$o(x, t)$	- occupation d'un segment de route
$K$	- concentration
$Kc$	concentration critique
$Kmax$	- concentration maximale
$\alpha$	- paramètre du Diagramme Fondamental (DF)
$a(\rho(x, t))$	- accélération – en un point $x$ de la route à un instant $t$
$r(x, t)$	- densité d'une rampe d'entrée de la voie principale
$r_{min}$	- flux minimal en sortie d'une rampe vers la voie principale
$r_{max}$	- flux maximal en sortie d'une rampe vers la voie principale
$\delta_1$	- paramètre lié au modèle de la rampe d'entrée
$s(x, t)$	- modèle d'une rampe de sortie de la voie principale
$\delta_2$	- paramètre lié au modèle de la rampe de sortie
$\chi_j$	- modèle d'un rétrécissement au $j^{\text{ème}}$ segment
$w(x, t)$	- modèle d'une file d'attente sur la rampe d'entrée
$d(t)$	- demande de la rampe d'entrée
$N(x, t)$	- nombre de véhicules
$q_{in}$	- flux d'entrée (débit d'entrée) d'un segment de route
$q_{out}$	- flux de sortie (débit de sortie) d'un segment de route
$m$	- segment de route d'indice $m$
$L$	- longueur d'une section
$L_m$	- longueur du segment $m$ de route
$j$	- indice d'un segment (tronçon) de route
$\lambda_m$	- nombre de voies du segment $m$ de route
$T$	- pas de discrétisation temporel
$\tau$	- temps de relaxation vers l'état d'équilibre du système dynamique
$\Delta T$	- temps de parcours minimal

$g_{t_i}(t)$	- espace entre le véhicule $i$ et $i+1$
$h_{s_i}(t)$	- espace total admissible
$h_{t_i}(t)$	- temps total admissible
$\rho_i(t)$	- temps d'occupation
$\partial_t \rho_j(x,t)_{acc}$	- terme d'accélération
$\partial_t \rho_j(x,t)_{diff-v}$	- terme de diffusion de la vitesse
$\partial_t \rho_j(x,t)_{int}$	- terme d'interaction
$\partial_t \rho_j(x,t)_{change-voie}$	- terme de changement de voie
$p'(\rho)$	- pression, liée au comportement du conducteur
$\varepsilon$	- coefficient de viscosité de l'équation de Burger
$R_k(x,t)$	- paramètre de régulation (constante de régulation)
$G(x, \zeta, t, \tau)$	- fonction de Green
$\hat{G}(x, \zeta, t, \tau)$	- fonction de Green modifiée
$x, \zeta$	- variables spatiales
$t, \tau$	- variables temporelles
*	- produit de convolution de deux fonctions
$\delta(x)$	- impulsion unitaire
$\delta(x-\zeta)$	- impulsion unitaire distribuée au point $\zeta$
$D, L$	- opérateur différentiel
$\delta(t-\tau)$	- impulsion unitaire distribuée à l'instant $\tau$
$G^*(p)$	- fonction de transfert du procédé nominal
$G(p)$	- fonction de transfert du procédé perturbé
$G^{\blacksquare}(p)$	- fonction de transfert du procédé le plus perturbé
$y(t), Y(p)$	- signal d'entrée du système
$y'(t), Y'(p)$	- signal de sortie du système (variable commandée)
$u(t), U(p)$	- variable de commande (sortie du régulateur)
$\zeta(t), \zeta(p)$	- variable de perturbation
$N$	- nombre de cellules de l'approximation rationnelle d'un opérateur CRONE selon Alain Oustaloup
$n$	- ordre du modèle du procédé
$n'$	- ordre non-entier d'approximation du régulateur CRONE
$\omega_b$	- fréquence basse (borne basse du gabarit généralisé à phase constante)
$\omega_h$	- fréquence haute (borne haute du gabarit généralisé à phase constante)
$\omega_u$	- fréquence de coupure du modèle du procédé
$\omega_k$	- fréquence du numérateur de la cellule $k$ de l'approximation rationnelle du gabarit généralisé
$\omega_{k+1}$	- fréquence du numérateur de la cellule $k+1$ de l'approximation rationnelle du gabarit généralisé

$\omega'_k$	- fréquence du dénominateur de la cellule $k$ de l'approximation rationnelle du gabarit généralisé
$\omega'_{k+1}$	- fréquence du dénominateur de la cellule $k+1$ de l'approximation rationnelle du gabarit généralisé
$\alpha$	- coefficient de l'approximation rationnelle cellulaire – rapport du numérateur et dénominateur de chaque cellule de l'approximation
$\eta$	- coefficient de l'approximation rationnelle cellulaire – rapport entre la fréquence du dénominateur de la cellule $k+1$ vers la fréquence du numérateur de la cellule $k$
$\alpha \eta$	- définit le diapason du gabarit généralisé
$\lambda$	- coefficient de l'approximation rationnelle cellulaire définissant la marge du gabarit généralisé
$C_0$	- gain statique de l'approximation de l'opérateur CRONE
$m_n'$	- nombre non-entier
$m_e'$	- ordre de la cellule zéro – toujours égale à un
$\Phi_m$	- marge de phase
$M_g$	- marge de gain
$D$	- dépassement
$Q$	- facteur d'amortissement
$\eta(j\omega)$	- fonction de sensibilité (fonction de transfert d'un système à boucle fermée) - signal du retour d'état
$e(j\omega)$	- fonction de sensibilité supplémentaire (fonction de transfert de l'erreur d'un système à boucle fermée) – signal d'erreur

## Liste des acronymes et abréviations

<i>EDO</i>	- équation différentielle ordinaire
<i>EDP</i>	- équation différentielle partielle
<i>IC</i>	- conditions initiales (initial condition)
<i>BC</i>	- condition aux limites (boundary condition)
<i>DF</i>	- diagramme fondamental
<i>CRONE</i>	- Commande Robuste d'Ordre Non-Entier
<i>GG</i>	- gabarit généralisé
<i>GV</i>	- gabarit vertical
<i>GH</i>	- gabarit horizontal
<i>FT</i>	- fonction de transfert
<i>BO</i>	- boucle ouverte
<i>BF</i>	- boucle fermée
<i>MG</i>	- marge de gain

<i>MP</i>	- marge de phase
<i>FG</i>	- fonction de Green
<i>HVF</i>	- formule variationnelle de Hadamard (Hadamard variation Formula)
<i>TL</i>	- transformée de Laplace
<i>TF</i>	- transformée de Fourier
<i>PC</i>	- produit de convolution
<i>DDF</i>	- Dirac Delta Fonction
<i>DPS</i>	- système à paramètres distribués
<i>PMV</i>	- panneau à messages variables
<i>SR</i>	- stabilité robuste
<i>PR</i>	- performance robuste
<i>DTC</i>	- « Dead Time Compensator »

## Liste des tableaux

*Tableau 2.1.* Paramètres du modèle LWR de référence

*Tableau.2.2.* Marges de variation des paramètres du modèle LWR

*Tableau.2.3.* Ensemble paramétrique de variation des paramètres du modèle LWR

*Tableau.3.1.* Perturbations paramétriques

*Tableau.4.1.* Synthèse d'un D différentiateur non-entier

*Tableau.4.2.* Synthèse d'un D différentiateur non-entier

*Tableau.4.3.* Synthèse d'un D différentiateur non-entier

*Tableau.4.4.* Synthèse d'un I intégrateur non-entier

*Tableau.4.5.* Synthèse d'un I intégrateur non-entier

*Tableau.4.6.* Synthèse d'un I intégrateur non-entier

*Tableau.4.7.* Synthèse d'un F filtre non-entier

*Tableau.4.8.* Synthèse d'un F filtre non-entier

*Tableau.4.9.* Synthèse d'un F filtre non-entier

## Table des schémas

*Schéma.1* Carte de la structure logique entre les chapitres et les annexes de la thèse

*Schéma 1.1.* Classification des modèles du flux de trafic

*Schéma.1.2.* Organigramme du principe de la modélisation d'un processus réel

*Schéma 1.3.* Classification des modèles du flux de trafic macroscopiques

*Schéma.4.1.* Descriptif et analyse des schémas de commande

## Table des figures

Fig.1.1 Modèle de la voiture suiveuse

Fig.1.2 Modèle de changement de voie

Fig.1.3. Densité routière

Fig.1.4. Débit routier

Fig.1.5. Diagrammes fondamentaux

Fig.2.1. Méthodes de résolution des équations différentielles

Fig.2.2 Distribution de la densité dans le cas d'une demande (consigne) trapézoïdale

Fig.2.3. Solution de PDE a une vitesse constante  $c$ .

Fig. 2.4. Caractéristiques de la distribution des ondes de véhicules sur un segment

Fig. 2.5. Caractéristiques de la distribution des ondes de véhicules sur un segment

Fig.2.6. Zone de choix des paramètres de variation – contrainte de fluidité sur le D.F.

Fig.2.7. Ensembles de variation des paramètres du modèle physique et de simulation

Fig.2.8. Schéma structurel du modèle LWR du flux de trafic routier

Fig.2.9. Schéma d'influence des variables du modèle par les perturbations

Fig.2.10. Dépendance des paramètres du modèle  $k$ ,  $T$  et  $\tau$  de  $V(x,t)$  pour le D.F.de Greenschild

Fig.2.11. Dépendance des paramètres du modèle  $k$  et  $T$  du changement de  $V_f$  et de  $\tau$

Fig.2.12. Etude temporelle d'un segment simple avec des perturbations paramétriques

Fig.2.13. Etude harmonique d'un segment simple avec des perturbations paramétriques

Fig.2.14. Etude temporelle d'un segment simple sous l'influence de perturbations paramétriques et de perturbations structurelles

Fig.2.15. Etude fréquentielle d'un segment simple sous l'influence de perturbations paramétriques et de perturbations structurelles

Fig.2.16. Schéma structurelle du procédé avec une perturbation externe de type signal – débit d'entrée sur le segment de la route.

Fig.2.17. Etude temporelle d'un modèle simple avec variation paramétrique et avec perturbation externe de type signal de consigne – demande sur la voie principale

Fig.2.18 Schéma structurel d'un segment constitué à partir de segments simple en série

Fig.2.19. Réponse indicielle d'un segment uniforme de 3km sans perturbation

Fig.2.20. Réponses fréquentielles d'un segment uniforme de 3km sans perturbation

Fig.2.21. Réponse indicielle et lieu de Nyquist d'un segment non-uniforme de 3 km avec une rampe d'entrée et/ou de sortie

Fig.2.22. Réponses indicielles d'un segment de 3km avec perturbations paramétriques

Fig.2.23. Etude harmonique d'un segment de 3km avec perturbations paramétriques

Fig.3.1. Organigramme de différentes étapes d'un projet de commande, suite des étapes du principe de la modélisation d'un processus réel

Fig. 3.2. Schéma structurel de la stratégie de commande par retour d'état

Fig.3.3. Stratégies de commande par contrôle d'accès

Fig.3.4. Schéma de principe de la stratégie «routage dynamique» du contrôle d'accès

Fig.3.5. Le nœud comme un élément de la structure de l'autoroute

Fig.3.6. Schéma des influences qui provoquent l'incertitude dans le modèle

Fig.3.7. Points d'application des perturbations dans le schéma structurel du système

Fig.3.8. Stratégies de contreactions aux influences perturbatrices

Fig.3.9. Bruit aléatoire ou signaux d'ondes qui provoquent l'incertitude dans le modèle

Fig3.10. Nyquist analyse de stabilité robuste d'un système de commande présentée sous forme d'un système multi-modèle linéaire (statique ou astatique) avec son modèle de référence et ses modèles perturbés

Fig.3.11 Critères de stabilité et performance robuste pour un système

Fig.3.12. Schéma structurelle d'un système de commande des flux de trafic routiers

Fig.3.13. Diapason fréquentiel symétrique

Fig.3.14. Diagramme de Bode d'un algorithme non-entier I et PID, approximation avec 6 cellule de type intégro-différentielle

Fig.3.15. Diagramme de Bode d'un régulateur intégrale non-entier, approximation avec k cellule de type intégro-différentielle

Fig.3.16. Diagramme de Bode d'un régulateur intégrale non-entier, approximation avec k cellule de type intégro-différentielle

Fig.4.1. Système de de commande avec un prédicteur de Smith d'ordre non entier

Fig.4.2. Algorithme de synthèse du régulateur

Fig.4.3. Diapason fréquentielle de distribution des zéros et des pôles du régulateur

Fig.4.4. Critère fréquentiel d'un « gabarit généralisé »

Fig.4.5.a. Schéma structurel d'un système avec prédicteur de Smith et compensation du retard

Fig.4.5.b. Schéma structurel d'un système avec prédicteur de Smith et compensation du retard

Fig.4.5.c. Schéma structurel classique équivalente Smith avec compensation du retard

Fig.4.6. Algorithme de synthèse du régulateur

Fig.4.7. Système de commande CRONE pour le flux de trafic routier

Fig.4.8. Propriétés du régulateur non-entier, non-entier avec Smith prédiction et non-entier avec Smith prédiction et filtre de compensation DTC

Fig.4.9.a. Représentation physique d'un système simple – segment routier simple

Fig.4.9.b. Représentation physique d'un système en cascade – segment routier avec une rampe d'entrée

Fig.4.10. Etude d'un modèle d'un segment simple

Fig.4.11.a. Etude temporelle d'un système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

Fig.4.11.b. Etude Diagramme fondamental reconstruit à la base du D.F. de Greenshield (débit/densité) pour le système de commande – mesuré au premier km pour le modèle de référence

Fig.4.12. Etude harmonique d'un segment simple – étude comparatif entre le modèle du trafic sans commande et le système de commande CRONE avec Smith prédiction

Fig.4.13. Analyse de Nyquist de la robustesse du système de commande CRONE avec un prédicteur de Smith en B.O.

Fig.4.14.a. Analyse robuste du système en B.O. - système de commande CRONE avec Smith prédiction

Fig.4.14.b. Analyse robuste du système en B.F.- système CRONE avec Smith prédiction

Fig.4.15.a. Etude temporelle du système de commande avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation - segment simple avec perturbations paramétriques, excitation externe et consigne

Fig.4.15.b. Diagramme fondamental reconstruit à la base de D.F. de Greenschild débit/densité) pour le système de commande – mesuré au premier km pour le modèle de référence

Fig.4.16. Etude harmonique – comparaison entre le modèle du trafic sans commande et le système de commande CRONE avec Smith prédiction et filtre de compensation DTC

Fig.4.17. Analyse de Nyquist de la robustesse du système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation DTC en B.O. – mesure effectué en six points

Fig.4.18. Etude de l'efficacité du contrôle pour le système de référence – comparaison entre les densités relatives : d'entrée et de sortie

Fig.4.19. Etude de la stabilité par les réponses harmoniques des deux systèmes de commande – lieu de Nyquist

Fig.4.20. Etude de la stabilité par les réponses harmoniques des deux systèmes de commande – diagramme de Black-Nichols

Fig.4.21. Etude dans ce cas d'un segment composé avec une rampe d'entrée entre les deux point de mesure sur le segment

Fig.4.22.a. Système de commande cascade avec un Smith prédiction non-entier et filtre de compensation non-entier DTC

Fig.4.22b. Système de commande cascade avec un Smith prédiction non-entier et filtre de compensation non-entier DTC

Fig.4.23. Etude temporelle et reconstitution du diagramme fondamental d'un système en cascade - segment avec une rampe d'entrée - système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC

Fig.4.24. Etude harmonique d'un système en cascade pour un segment avec une rampe d'entrée - système de commande CRONE avec Smith prédiction et filtre de compensation

Fig.4.25. de Nyquist d'un système en cascade en B.O. - segment avec une rampe d'entrée

Fig.4.26 Analyse robuste d'un système en cascade B.O.-segment avec une rampe d'entrée

# ABSTRACT

This thesis presents research carried out to several elements of the macroscopic traffic flow as the model, the control and the simulation of his control system. The main aims of the realized studies consist to keep the circulation on the high-ways fluid. That means that we must to assure some quality of the process regarding the stability of this process. More over to offer best performances and quality of the traffic services for the users on the ways networks.

In our study we use the analytical solution method of the dynamic equation presenting the LWR traffic flow model process, for which we look to obtain transfer function. Our objective is to obtain a conform result to a toll plaza. Furthermore we look to make a choice of appropriate control algorithm to satisfy the traffic network and users' needs. The traffic flow management needs results from the increasingly of the flows. As consequence of this we can obtain saturation in some places in the road network wildly known as a traffic jam usually in the rush hours, by reason of accident or repairs works. All this provoke a delay of the transportation flow and important environmental after-effect. Therefore it's very important to assure the fluidity of the traffic using control strategies which will cancel, reduce or delay the traffic jam appearances. Because of all the reasons above, we have proposed a system with non-integer order control algorithm for maintain the traffic fluid by the control of the pikes in the toll plaza. The control variable is the upstream density which will influence on the downstream one. After the analytical solution of the toll plaza model we obtain a delay function which presents the plant in our distributed parameter system. For this system we apply a Smith prediction non-integer control algorithm and moreover we ameliorate this system with a Dead time non-integer order compensator.

# RÉSUMÉ

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'articule autour de plusieurs éléments d'études concernant les modèles macroscopiques de flux de trafic routier à savoir la modélisation, la simulation et la commande. L'objectif de l'étude consiste à atteindre ou à maintenir une circulation automobile fluide sur des voies rapides. Il s'agit donc de s'assurer que le processus de flux de trafic routier reste dans des limites de stabilité et tout en offrant les meilleures performances et qualités de service aux usagers.

Premièrement la présente thèse propose une démarche qui repose sur l'analyse de la solution analytique d'une équation dynamique d'évolution du processus afin d'obtenir une fonction de transfert (TF). Le modèle retenu est un modèle macroscopique de flux de trafic du premier ordre du type LWR. L'objectif ici reste la modélisation analytique conforme au modèle du réseau routier, qui dans notre cas particulier représente un segment en aval d'un péage routier.

En deuxième plan les recherches sont orientées dans domaine de la commande des flux de trafic et le choix d'une stratégie qui satisfait les besoin des usagers sur les autoroutes. Le besoin de faire le contrôle des axes routier était provoqué par la croissance des flux et la saturation des voies de circulation. Alors, ce déséquilibre est la cause de l'apparition de congestions aux heures de pointe, qui provoquent des retards dans les déplacements. Il est donc nécessaire de garantir la fluidité du trafic routier par l'utilisation des conceptions et l'implémentation de stratégies de commande efficaces permettant d'annuler, de réduire, ou de retarder l'apparition de congestions. Dans la présente thèse on propose une boucle de correction robuste de type CRONE avec ses critères de commande, afin de satisfaire les objectifs de qualité requise du réseau routier face aux aléas de circulation et afin de tenir la circulation après le péage routier fluide, par le contrôle des barrières du péage.

Notre but est de faire le contrôle de la densité par régulation de la densité initiale venant du péage au début du segment en aval. Autrement dit la densité initiale représente un rapport du débit d'entrée du flux en amont et sa vitesse de circulation. Le résultat obtenu dans le (Chapitre.II) représente un retard pur pour le modèle du trafic comme un système à paramètre distribué. Voilà pourquoi nous proposons une commande d'ordre non-entière avec Smith prédiction et compensation du retard. Dans le système de commande nous proposons un modèle du trafic dont la variable de contrôle est la densité du segment et la variable de régulation est la densité d'entrée avant le péage. Pour tous les travaux de simulation dans la thèse, nous nous sommes servis du logiciel Matlab/Simulink pour faire une étude temporelle et harmonique par la stabilité du système et de ses performances. Les résultats temporels présentent l'influence de la variation de la densité, du débit et de la vitesse dans le temps le long de la route en aval du péage. Pareillement pour effectuer l'étude de la stabilité et des performances robustes du modèle obtenu, ainsi que pour obtenir les paramètres du régulateur non-entier, une étude harmonique complète les résultats et les analyses.

# INTRODUCTION

Le développement économique mondial induit une intensification des échanges internationaux et, par voie de conséquence, une augmentation toujours croissante des flux de transport des biens et des personnes. Cette augmentation des flux est la cause de la saturation des voies de circulation routière. Le déséquilibre entre la demande et l'offre en matière de transport est la cause de l'apparition de congestions aux heures de pointe aux abords et dans les grandes agglomérations. Les congestions provoquent des retards dans les déplacements, ils augmentent les risques d'accidents, ils ont un impact négatif sur l'environnement et ils sont la cause d'une dégradation de la qualité de vie des citoyens. Il est donc nécessaire de garantir la fluidité du trafic routier, ce qui impose de minimiser l'apparition des congestions ou de réduire leur durée lorsqu'elles n'ont pu être évitées.

Une congestion se forme quand un nombre trop important de véhicules tentent d'emprunter le même tronçon de route au même moment. Ceci peut se produire lorsque des travaux ou un accident provoque une diminution de la capacité de la route. L'apparition de phénomènes climatiques comme le verglas ou la pluie peuvent également modifier gravement les conditions de circulation et ainsi être la cause de la formation de congestions.

Pour réduire les effets d'une congestion, plusieurs solutions existent. Une première solution consiste à effectuer des travaux sur le réseau routier afin d'en augmenter sa capacité ou de créer de nouveaux axes routiers. Une seconde solution consiste à développer les transports en commun et surtout à inciter les usagers à les emprunter en priorité. Enfin une dernière solution consiste à réguler directement le flux de trafic en agissant sur les feux de signalisation, les panneaux à messages variables, les accès aux rampes d'entrée, etc. L'installation de nouvelles infrastructures est souvent très difficile et très coûteuse à mettre en œuvre, de même inciter les usagers à utiliser les transports en commun n'est pas chose aisée et peut être aussi long et coûteux. C'est ainsi que les études sur les stratégies de régulation du flux de trafic ont tendance à se développer d'avantage car elles ne nécessitent en général pas de réaliser des investissements importants et sont généralement rapides à mettre en œuvre. La conception et l'implémentation de stratégies de commande efficaces permettent d'annuler, de réduire, ou de retarder l'apparition de congestions.

## Structure du manuscrit

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'articule autour de plusieurs éléments d'études concernant les modèles macroscopiques de flux de trafic routier à savoir la modélisation, la simulation et la commande. L'objectif de l'étude consiste à atteindre ou à maintenir une circulation automobile fluide sur des voies rapides. Il s'agit donc de s'assurer que

le processus de flux de trafic routier reste dans des limites de stabilité et tout en offrant les meilleures performances et qualités de service aux usagers.

La démarche proposée repose sur l'analyse de la solution analytique d'une équation dynamique d'évolution du processus afin d'obtenir une fonction de transfert (TF). Le modèle retenu est un modèle macroscopique de flux de trafic du premier ordre du type LWR [Lighthill, Whitham (1955a)], [Lighthill, Whitham (1955b)], [Richards (1956)], [Daganzo (1995)], [Papageorgiou (1998)], [Papageorgiou (1983)].

Une boucle de correction robuste de type CRONE est ensuite introduite afin de satisfaire les objectifs de qualité requise du réseau routier face aux aléas de circulation.

Le manuscrit de thèse contient deux parties distinctes : la modélisation avec sa solution analytique et une commande reposant sur un régulateur robuste d'ordre non-entier CRONE associé à un prédicteur de Smith et un élément de compensation. Il s'agit alors de déduire :

- la solution analytique conforme au modèle du réseau routier – dans notre cas il s'agit d'un segment, situé en aval d'un péage routier ;
- les critères de la commande choisie pour tenir la circulation après le péage routier fluide, par le contrôle des barrières du péage.

Le manuscrit est décomposé de la façon suivante : le *premier chapitre* présente un état de l'art sur la modélisation de flux de trafic routier. Les principaux travaux de recherche du domaine sont présentés en focalisant cette étude sur les modèles macroscopique du premier et du second ordre. Les définitions des différentes variables et des paramètres associés sont précisés.

Le *deuxième chapitre* traite des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles. Un système de trafic routier peut être vu à un niveau macroscopique comme un processus à paramètres distribués dans le temps et dans l'espace monodirectionnel. Ces systèmes sont donc décrits par des équations aux dérivées partielles qui du fait des conditions particulières d'écoulement du trafic sont également non linéaires. L'approche de résolution proposée conduit à obtenir la fonction de transfert du modèle LWR retenu pour cette étude. Celui-ci est conforme au modèle et permet d'étudier la stabilité de ce type de processus ainsi que ses performances.

Dans le *troisième et le quatrième chapitre* la nécessité de mettre en place une commande des systèmes de flux de trafic routier est développée. Un état de l'art sur les différentes commandes proposées dans la littérature pour la régulation du trafic est ainsi présenté avec la justification du choix d'une commande robuste d'ordre non-entier (CRONE) retenue dans le cadre de cette étude. Dans le *quatrième chapitre* nous suggérons un exemple de calculs et de simulation, développé selon les méthodes et les analyses faites dans les chapitres précédentes. Notre but est de faire le contrôle de la densité par régulation de la densité initiale venant du péage au début du segment en aval. Le résultat obtenu dans le (Chapitre.II) représente un retard pur pour le modèle du trafic comme un système à paramètre distribué. Voilà pourquoi nous proposons une commande d'ordre non-entière avec Smith prédiction et compensation du retard.

Dans le système de commande nous proposons un modèle du trafic dont la variable de contrôle est la densité du segment et la variable de régulation est la densité d'entrée.

Pour tous les travaux de simulation dans la thèse, nous nous sommes servis du logiciel Matlab/Simulink pour faire une étude temporelle et harmonique par la stabilité du système et de ses performances. Nous présentons la variation de la densité, du débit et de la vitesse dans le temps le long de la route en aval du péage. Pour effectuer l'étude de la stabilité et des performances robustes du modèle obtenu nous complétons les résultats et les analyses, en proposant une étude harmonique. D'autre côté l'étude fréquentielle est importante pour la conception de la commande et surtout pour obtenir les paramètres du régulateur non-entier, qui utilise la méthode récursive polynômiale fréquentielle de distribution des zéros et des pôles.

Une conclusion et des perspectives, ainsi qu'une bibliographie et des annexes succèdent aux chapitres de cette thèse présentés rapidement ci-dessus.

La structure du manuscrit, représentée sur le schéma.1 suivant, montre les liens entre les chapitres et les annexes :

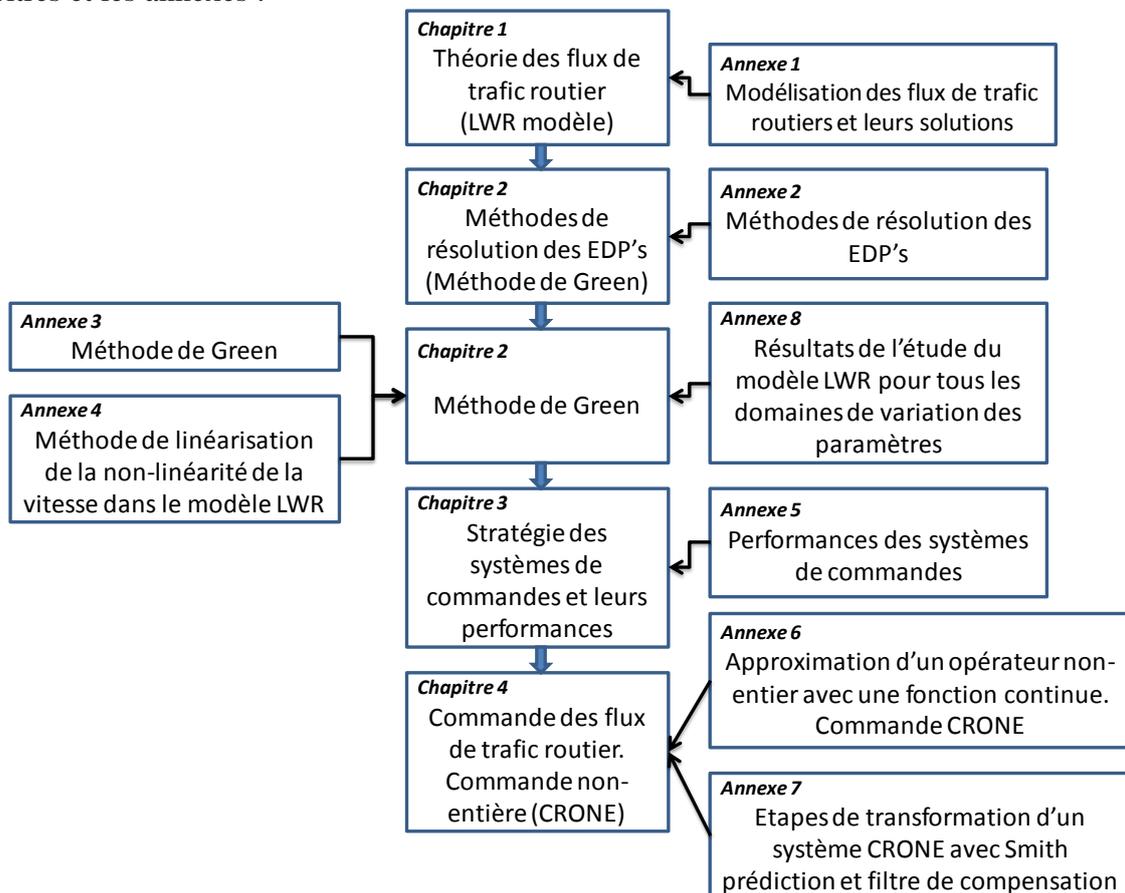


Schéma.1 Carte de la structure logique entre les chapitres et les annexes de la thèse

# CHAPITRE I : Etat de l'art sur les systèmes de flux de trafic routier

## SOMMAIRE

### Systemes de flux de trafic routier

- I.1. Etat de l'art sur les modèles de flux de trafic routier**
  - I.1.1. Modèles microscopiques**
  - I.1.2. Modèles mésoscopiques**
  - I.1.3. Modèles macroscopiques**
- I.2. Modèles macroscopiques du 1<sup>er</sup> ordre**
- I.3. Modèle mathématique du flux de trafic routier**
- I.4. Modèles macroscopiques du 2<sup>ème</sup> ordre de Payne**
- I.5. Conclusions**

### I.1. Etat de l'art sur les modèles de flux de trafic routier

Avant de passer en revue les différents modèles de flux de trafic routier que l'on peut trouver dans la littérature, il est important de présenter les éléments caractéristiques d'une circulation de véhicules dans un réseau routier. Il s'agira également de définir l'intérêt d'obtenir un modèle de flux de trafic routier. Un modèle de flux de trafic routier ne peut pas présenter de part son caractère abstrait en tout point les situations réelles rencontrées. Plusieurs types de modèles existent donc dans la littérature. De plus, et ceci de manière à simplifier les approches de modélisation que l'on peut rencontrer, il est possible de distinguer, de façon arbitraire, deux types de milieu à analyser :

- les milieux urbains où le trafic est très hétérogène et variable (présence de carrefours, de feux de signalisations, passages piétons - le réseau est très maillé avec beaucoup de changement de structure)
- les milieux interurbain où le trafic est plutôt invariable ou peu variable (les voies rapides et les autoroutes présentent peu de changements de structure – rampes d'entrée et de sortie, des rétrécissements), ils sont relativement homogènes.

Différentes situations peuvent ensuite être prises en considération, ce qui peut permettre une répartition des modèles en plusieurs groupes selon des critères de comportement individuel ou de comportement global de chaque véhicule.

Les différents modèles du trafic routier sont issus le plus souvent du raisonnement basé

sur la similarité qui peut être faite entre un flux de véhicules et des phénomènes physiques comme : l'écoulement d'un fluide dans une canalisation, la propagation d'une onde, le déplacement de particules dans un milieu homogène ou hétérogène, etc.

Différents modèles existent également suivant la granularité selon laquelle le flux de véhicules est représenté, ce qui a conduit les auteurs à distinguer jusqu'à aujourd'hui trois grandes familles de modèles [Papageorgiou M. (1998)], [Leclercq (2002)], [Bourrel (2003)], [El Hmam (2006)], [Benova (2006)] (schéma 1.1) :

- Les Modèles microscopiques (de choix d'itinéraire) – dynamique des véhicules individuels
- Les Modèles mésoscopiques – dynamique par groupe de véhicules homogènes
- Les Modèles macroscopiques (d'écoulement) – dynamique globale basée sur l'idée du mouvement d'un fluide

Chacune des trois familles impacte un comportement différent sur un réseau routier en intégrant des lois de propagation des véhicules, un choix d'itinéraires et des conditions de circulation différents.

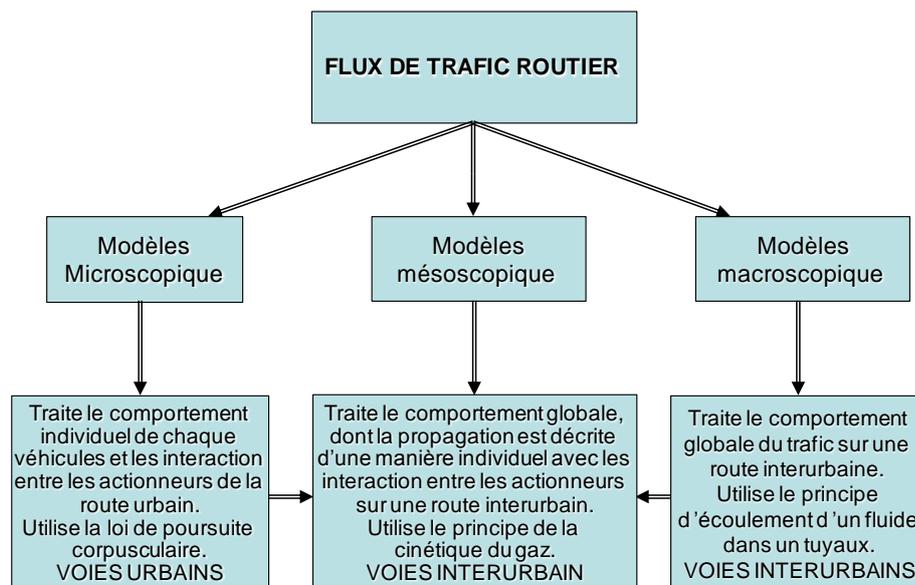


Schéma 1.1. Classification des modèles du flux de trafic

Toutes les étapes de modélisation décrite dans ce chapitre, servent à obtenir un modèle de flux de trafic conforme au système réel, dont la classification des étapes est représentée par l'organigramme suivant (schéma.1.2) :

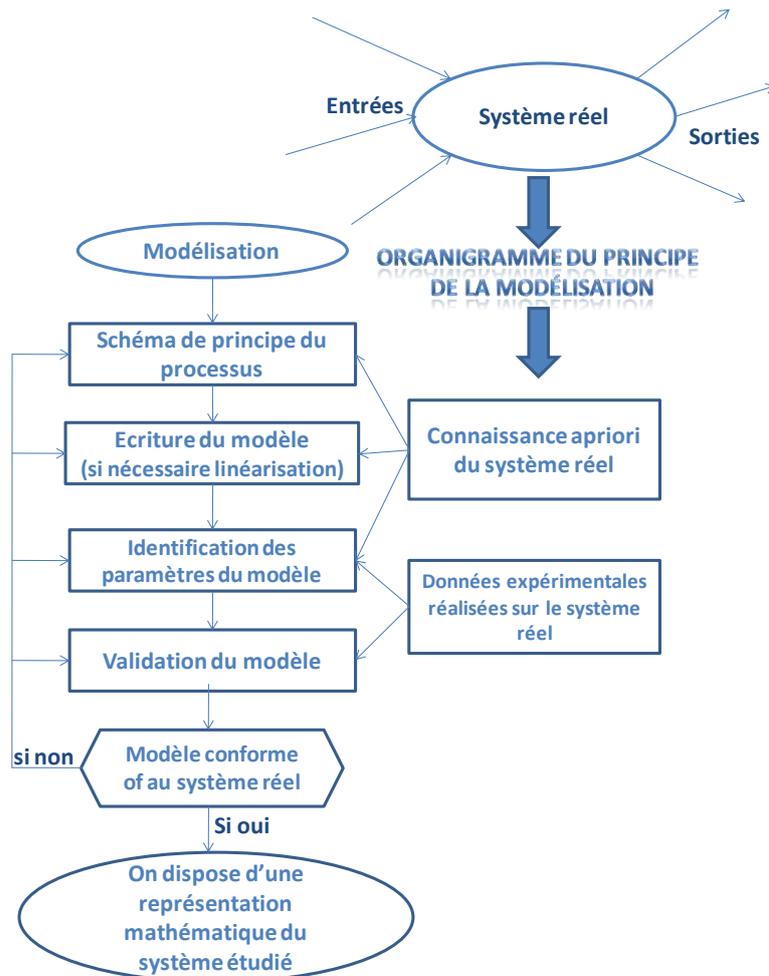


Schéma.1.2. Organigramme du principe de la modélisation d'un processus réel

### I.1.1. Les modèles microscopiques

Un « MODELE DE TRAFIC MICROSCOPIQUE » représente une situation de circulation, généralement dans des zones urbaines, basé sur un comportement individuel des véhicules. C'est chaque couple véhicule-conducteur avec leur interaction avec chaque participant dans la circulation (environnement) que le modèle représente. Les interactions entre les véhicules sont prises comme un phénomène corpusculaire (interaction moléculaire). Le comportement de chaque véhicule est pris individuellement. C'est une loi de poursuite corpusculaire qui est utilisée dans ce type de modèle pour expliquer le comportement global du trafic. Dans le cas d'une représentation de circulation multivoies et afin de rendre le comportement global plus réaliste, il est possible d'associer deux types de comportement des véhicules différents dans le même modèle [Bourrel (2003)], [Chanut (2005)], [Maerivoet (2006)] :

- le premier exprime le phénomène de la voiture-suiveuse (1.1) (fig.1.1) ;

Modèle microscopique qui exprime le phénomène de la voiture suiveuse

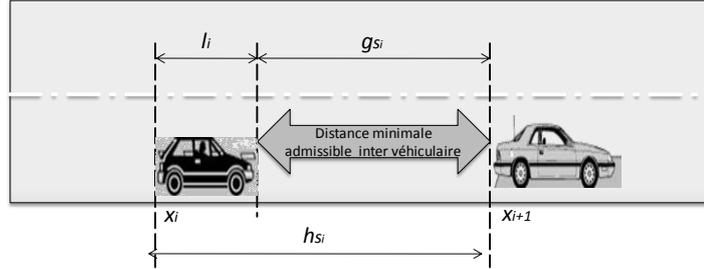


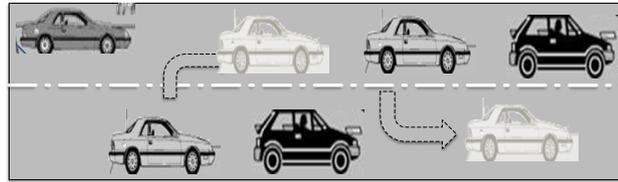
Fig.1.1 Modèle de la voiture suiveuse

$$h_{s_i}(t) = g_{s_i}(t) + l_i \text{ où } h_{s_i}(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t) \quad (1.1.1)$$

$$h_i(t) = g_{s_i}(t) + \rho_i(t)$$

$g_{s_i}(t)$  – espace entre le véhicule  $i$  et  $i+1$ ,  $h_{s_i}(t)$  – espace total admissible,  $h_i(t)$  – temps total admissible,  $\rho_i(t)$  – temps d’occupation

- le deuxième modèle exprime le changement de voies (fig.1.2).



Modèle microscopique qui exprime le phénomène de changement de voies

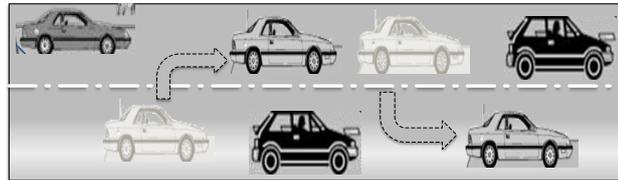


Fig.1.2 Modèle de changement de voie

$$\partial_t \rho_j(x,t) + v \partial_x \rho_j(x,t) = \partial_t \rho_j(x,t)_{acc} + \partial_t \rho_j(x,t)_{int} + \partial_t \rho_j(x,t)_{diff-v} + \partial_t \rho_j(x,t)_{change-voie} \quad (1.1.2)$$

$j$  – voie,  $\partial_t \rho_j(x,t)_{acc}$  - terme d’accélération,  $\partial_t \rho_j(x,t)_{diff-v}$  – terme de diffusion de la vitesse,  $\partial_t \rho_j(x,t)_{int}$  – terme d’interaction,  $\partial_t \rho_j(x,t)_{change-voie}$  – terme de changement de voie

Le modèle de changement de voie est complexe et prend en considération non seulement les distances admissibles entre les véhicules et les temps de réponse du conducteur lors d’un événement qui peut survenir en aval, mais aussi les conditions de circulation sur les voies adjacentes. Les vitesses limites autorisées doivent être respectées (ou pertes de vitesses pour les véhicules en amont) ainsi que les concentrations entre les différentes voies. Le nombre de variables à prendre en compte dans un tel modèle est très important, à cette échelle il s’agit de mémoriser à chaque instant : la position, la vitesse et l’accélération de chaque véhicule, ainsi que les distances inter-véhiculaires admissibles ce qui rend ce type de modèle complexe à utiliser dès lors que le réseau routier à représenter est lui-même important.

Dans un modèle microscopique de trafic routier, il est relativement difficile de décrire avec

précision le comportement individuel des conducteurs. L'écoulement du trafic résulte du comportement individuel qui a été intégré dans le modèle. Souvent les phénomènes sont représentés sur la base d'observations empiriques. A l'échelle microscopique, un changement de situation en aval ne provoquera nécessairement pas un changement sur le comportement du couple véhicule-conducteur si celui-ci n'a pas été intégré à l'avance. Les modèles microscopiques sont donc souvent simplifiés et ne considèrent qu'un comportement des conducteurs de façon unique.

### I.1.2. Les modèles mésoscopiques

Un « MODELE DE TRAFIC MESOSCOPIQUE » représente le trafic routier sous forme de paquets de véhicules dont la progression est décrite individuellement. Ce type de modèle donne une représentation d'un système de flux de trafic routier qui se situe entre les modèles microscopiques et les modèles macroscopiques.

Le flux de trafic est décomposé en sous-groupes de véhicules ayant des caractéristiques équivalentes en leur ajoutant une destination déterminée et un itinéraire donnés. Le premier modèle mésoscopique proposé est celui de Prigogine [Prigogine (1961)], [Hoogendorn et al. (2000)]. Il est basé sur la cinétique des gaz et décrit la dynamique de réduction de la densité spatio-temporelle. Prigogine et Herman ont ensuite [Prigogine et al. (1971)] introduit deux termes à cette première équation décrivant la dynamique de l'ensemble du flux routier. Le premier terme décrit le changement de la densité causé par l'accélération conduisant à la vitesse désirée et le deuxième terme correspond au changement de la densité provoqué par les interactions entre les véhicules eux-mêmes. Le modèle mésoscopique est représenté par la relation (1.1.3) :

$$\frac{\partial \rho(x,t,v)}{\partial t} + v \frac{\partial \rho(x,t,v)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x,t,v)_{acc}}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t,v)_{int}}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

$\frac{\partial \rho(x,t,v)_{acc}}{\partial t}$  - changement de la densité causé par l'accélération

$\frac{\partial \rho(x,t,v)_{int}}{\partial t}$  - changement de la densité provoqué par les interactions entre les véhicules

Les auteurs proposent que les changements de l'état du système sont provoqués en général par:

- l'accélération afin de conduire à la vitesse désirée ;
- la décélération provoquée par les événements en aval.
- les conducteurs ;

### I.1.3. Les modèles macroscopiques

Un « MODELE DE TRAFIC MACROSCOPIQUE » représente le comportement global du flux de trafic. Ces modèles sont développés sur la base d'une analogie hydrodynamique selon laquelle le flux de véhicules peut être assimilé à un fluide compressible en déplacement continu.

Les premiers modèles macroscopiques sont issus des travaux indépendants de Lighthill et Whitham en 1955 [Lighthill, Whitham (1955)] et de Richards l'année suivante [Richards (1956)]. Ils ont conduit aux modèles dits du premier ordre de type LWR. Néanmoins, les modèles de ce type possèdent plusieurs désavantages [Daganzo (1995)], [Papageorgiou (1998)] qui se résument en un nombre de suppositions irréalistes. Plus tard les modèles de type Payne, dits du deuxième ordre, éliminent les principaux défauts du modèle LWR [Payne (1971)]. De nombreux autres modèles sont proposés dans la littérature, ils sont en général tous issus de ces modèles de base [Hoogendorn S. et al. (2000)].

Une classification simplifiée des modèles macroscopiques peut être représentée sur le schéma.1.3 suivant :

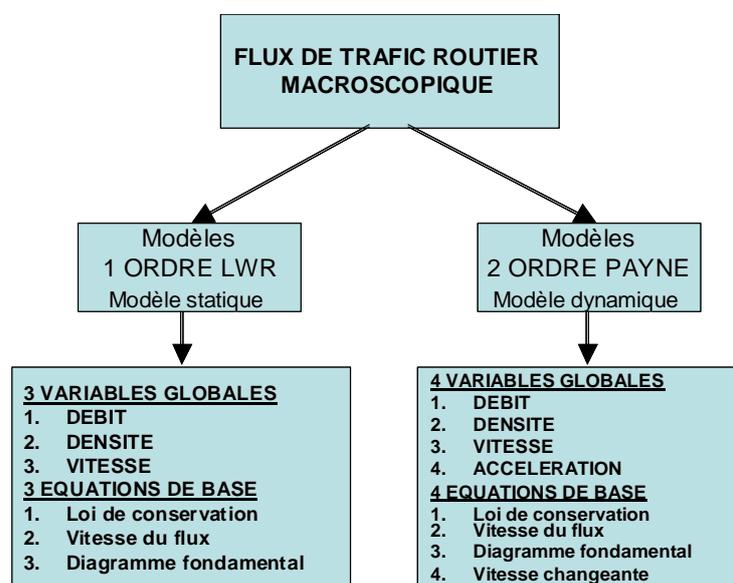


Schéma 1.3. Classification des modèles du flux de trafic macroscopiques

Dans la suite nous allons décrire plus en détail ces modèles.

## I.2. Les modèles du premier ordre

Le premier modèle macroscopique de type LWR proposé initialement par Lighthill et Whitham [Lighthill et Whitham (1955)] et complété par Richards [Richards (1956)] repose sur la loi de la conservation de la masse. Il part du principe que la masse est transportée sans pertes ni accumulation. Autrement dit ces modèles sont basés sur l'affirmation selon laquelle le même nombre de véhicules qui entrent dans un intervalle de temps en un point de l'espace va ressortir par un autre point de l'espace dans le même intervalle de temps.

Dans le cas des modèles microscopiques les véhicules sont considérés tous séparément. Le comportement des véhicules y est décrit d'une manière individuelle. Il s'agit de respecter différentes contraintes comme la longueur des véhicules, la distance inter-véhiculaire, le temps de réaction des conducteurs, la vitesse et l'accélération propre aux véhicules. Dans le cas des modèles macroscopiques le comportement individuel des véhicules, n'est plus décrit, seul le

déplacement de l'ensemble des véhicules  $y$  est représenté.

Avant de développer plus avant les modèles macroscopiques il est important de définir l'ensemble des variables et des notions sur lesquelles ils ont été établis :

- **la densité  $\rho(x,t)$**  [véh/km] est le nombre de véhicules qui sont présents à l'instant  $t$  dans l'intervalle de l'espace compris entre  $x$  et  $x+dx$  (Fig.1.3);

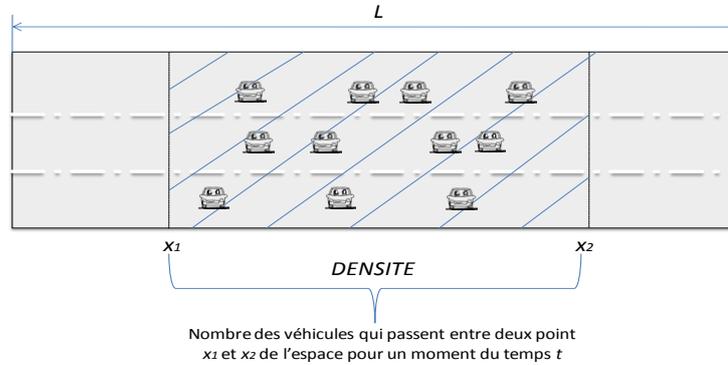


Fig.1.3. Densité routière

- **le débit  $q(x,t)$**  [véh/h] est le nombre de véhicules qui passent en un point de l'espace  $x$  pour un intervalle de temps compris entre  $t$  et  $t+dt$  (Fig.1.4);.

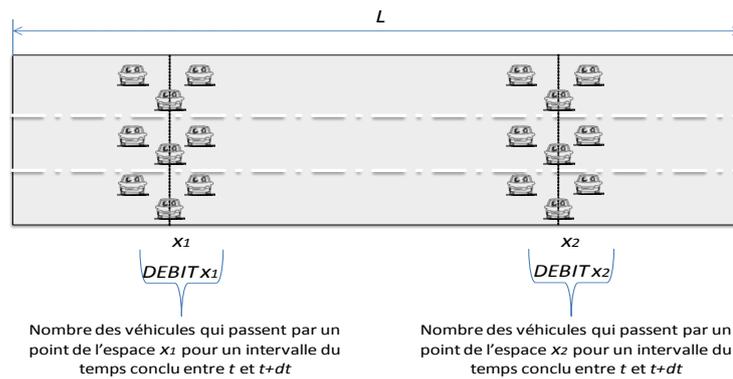


Fig.1.4. Débit routier

- **la vitesse  $V(x,t)$**  [km/h] est la vitesse moyenne du flot dépendant de la densité des véhicules en un point  $x$  de l'espace à un instant  $t$

Toutes ces notions de base peuvent être exprimées analytiquement dans le domaine continu par les relations suivantes (1.2) et (1.3), où  $N$  est le nombre de voitures situées à un intervalle spatial, compris entre  $x_1$  et  $x_2$ .

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx = q(x_1,t) - q(x_2,t) \\ q(x_1) - q(x_2) &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x,t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{conservation de la masse} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow q(x,t) = \rho(x,t)V(x,t); \quad V = V(\rho) \text{ où } V = V(\rho, x, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial \rho(x,t)} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V(\rho(x,t)) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} &= 0, \\ V(\rho(x,t)) &= \frac{\partial q(x,t)}{\partial \rho(x,t)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ce sont ces relations entre le débit, la densité et la vitesse qui ont été reprises par **M. Lighthill, and G. Whitham**, *On Kinematics Waves II: A Traffic Flow Theory on Long Crowded Roads*, (1955), **P. Richards**, *Shock Waves on the Highway*, (1956) pour donner la naissance au modèle LWR dit du premier ordre. Le débit change avec les variations de la densité du flux ce qui est décrit par une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire (ou non-linéaire) du premier ordre (1.2) et (1.3).

Reprenons ci-dessous les éléments fondamentaux de représentation des systèmes de flux de trafic routier conduisant aux modèles du premier ordre.

### I.3. Modèle mathématique du flux de trafic routier

Les éléments fondamentaux qui représentent les flux de trafic routier de premier ordre sont liés aux trois relations suivantes :

- *La loi de conservation (1.4)* – le nombre de véhicules qui entrent en un moment donnée sur une section doit être égal au nombre de véhicules sortants de la section dans le même intervalle de temps.

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

- *La vitesse du flux (1.5)* – la vitesse du flux est la vitesse d'équilibre à laquelle se déplacent les véhicules sur une section donnée dans un intervalle de temps.

$$V = V_{eq}(\rho(x,t)) \quad (1.5)$$

- *Le diagramme fondamental (DF) (1.6) et (1.6.1)* - Pour chaque élément d'infrastructure, les trois variables fondamentales de vitesse moyenne, de densité et de débit, sur lesquelles reposent les modèles macroscopiques, sont liées entre elles par une relation fondamentale telle que le débit est égal au produit de la densité par la vitesse (1.6). Cette relation fondamentale est décrite par un diagramme fondamental obtenu à partir d'une étude expérimentale d'une section de route, correspondant à une succession de points d'équilibre entre toutes ces variables. Dans la littérature différents auteurs proposent de nombreuses représentations du diagramme fondamental qui approximent la relation  $q=f(\rho)$  et  $V=f(\rho)$ . Parmi les relations les plus couramment rencontrées il y a celles proposées par [Greenschild (1934)], [Cassidy (1998)], [Greenberg (1959)], [Drake et al (1967)], [Daganzo et al. (2003)] etc. Les

équations (1.6.1) sont des exemples parmi les plus courants de ces relations liant la densité et la vitesse dans une section de route donnée :

$$Q(x,t) = \rho V(\rho(x,t)) - \text{Diagramme fondamental} \quad (1.6)$$

$$V(x,t) = \begin{cases} V_f \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right) - \text{Greenschild} \\ V_f \exp \left( -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{\rho(x,t)}{\rho_{cr}} \right)^\alpha \right) - \text{Drake} \\ V_f \left( \ln \left( \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right) \right) - \text{Greenberg} \end{cases} \quad (1.6.1)$$

La relation (1.4) est une équation d'Euler, exprimant la conservation de la masse d'un fluide incompressible. Le processus représente un système à paramètres distribués dans le temps et dans l'espace monodirectionnel. En associant à la relation 1.4 la relation fondamentale (1.6), celle-ci peut s'écrire selon l'équation aux dérivées partielles (EDP) (1.7).

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (V(x,t)\rho(x,t))}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \rho(x,t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Le modèle (1.7) forme la base des modèles du 1<sup>er</sup> ordre macroscopique en lui associant un diagramme fondamental (DF) parmi les équations (1.6.1).

Un D.F. présente une densité critique, observée lorsque le flux de trafic est maximum. Ce point de fonctionnement partage le diagramme fondamental en deux zones (Fig.1.5). La première **zone correspond à un trafic fluide** où la densité est inférieure à la densité critique. Le flux croît avec la densité alors que la vitesse des véhicules diminue peu à partir de la vitesse libre. La densité est telle que les véhicules se gênent relativement peu les uns les autres. **La deuxième zone correspond à un flux congestionné** où la densité est supérieure à la densité critique. Le flux décroît avec l'augmentation de la densité et la vitesse des véhicules diminue fortement jusqu'à l'arrêt complet.

*Greenschild* [Greenschild (1935)] est le premier auteur à avoir proposé un modèle mathématique du D.F. Il a considéré une décroissance linéaire de la vitesse et de la densité ce qui conduit à une forme parabolique du diagramme fondamental, d'autres formes ont été proposées par la suite, en voici une liste non exhaustive :

- Diagramme parabolique – [Greenschild (1935)], Masson
- Diagramme bi-parabolique à tangente horizontale – [Greenberg (1959)]
- Diagramme bi-parabolique – [Buisson (1995)]
- Diagramme triangulaire – [Cassidy (1998)]
- Diagramme trapézoïdal – [Daganzo (1994)]

- Diagramme exponentiel – [Drake et al (1967)], [Papageorgiou (1990)]
- Diagramme curviligne – [Cramer, Pipes (1967)]

En réalité le D.F. relevé expérimentalement se présente comme un nuage de points de fonctionnement. Les modèles mathématiques proposés par ces différents auteurs ne sont donc que des approximations d'états d'équilibres (1.6.1) (Fig.1.5) [Wenlong Jin (2003)], [Florence Giorgi (2002)]. Sur la figure 1.4 sont représentés quelques uns de ces diagrammes fondamentaux :

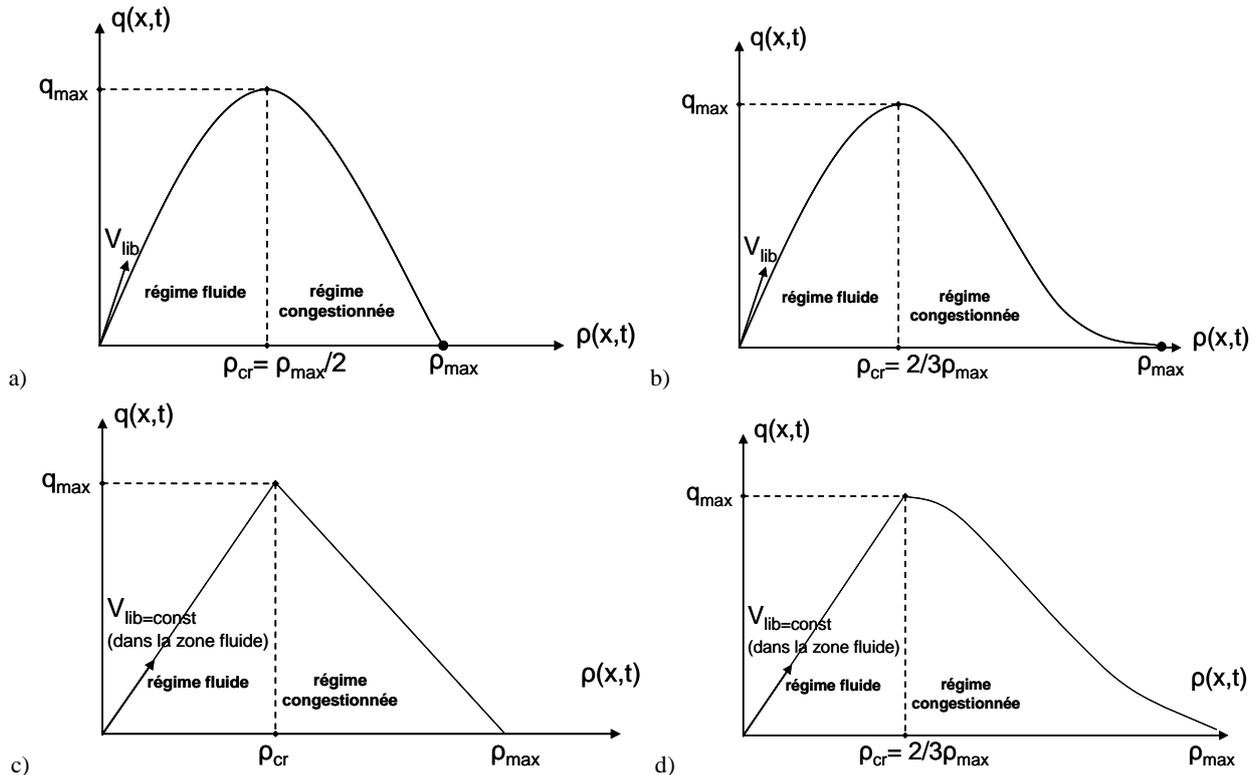


Fig. 1.5. Diagrammes fondamentaux – a) Greenschild, b) Drake, c) Cassidy, d) Greenberg

Les modèles de ce type possèdent plusieurs désavantages [Daganzo (1995)], [Papageorgiou (1998)], [Lebacque J.P. et al. (1999)], qui se résument en un nombre de suppositions irréalistes. Les premières sont que la vitesse s'adapte instantanément à sa valeur désirée et que le débit de sortie des ondes de choc ou des embouteillages est égal à la capacité de l'infrastructure. Une autre propriété non justifiée de ces modèles est d'assumer que le corps de densité élevée d'une onde de choc possède une vitesse inférieure à celle de la queue dont la densité est plus faible. Cela signifie que la queue atteindra le corps même de l'onde de choc, ce qui est irréalisable. De plus, le modèle LWR ne permet pas de représenter des instabilités comme, par exemple, le trafic "stop-and-go" (successions de démarrages et de freinages lors des congestions).

## I.4. Les modèles macroscopiques de 2<sup>ème</sup> ordre de Payne (correction d'ARZ, Zhang, Papageorgiou et Kotsialos)

Lorsqu'on a constaté que les modèles de premier ordre ont des limites de solution et surtout qu'ils ne permettent pas de modéliser les états en dehors des états d'équilibre, les modèles de deuxième ordre étaient mis en évidence. A cet effet, pour étudier les états hors d'équilibre (accélération et décélération), de nombreux auteurs ont proposé de compléter le modèle LWR avec une équation dynamique indépendante, exprimant le comportement de l'accélération ( $a$ ) du flux (variation de la vitesse sur un tronçon pendant un espace temps) [Payne (1971)], [Zhang (1998)], [Daganzo (1995)], [Leclercq (2002)].

La forme générale de présentation de cette équation, qui traduit le comportement de l'accélération du flux, est : par un terme de relaxation (vers l'état d'équilibre) et par un terme qui exprime plus au moins un comportement individuel des véhicules. Pour une section de la route, contenant plusieurs tronçons les paramètres de cette équation (1.8) sont les suivants :

- $\rho_{m,i}(x,t)$  [véh/km/voie] - densité - nombre de véhicules dans le tronçon  $i$  à l'intervalle de temps  $t$ , divisé par la longueur du segment  $L_m$  et par le nombre de voies ;
- $v_{m,i}(x,t)$  [km/h] - vitesse du flux - vitesse du flux dans le tronçon  $i$  à l'intervalle de temps  $t$  ;
- $v_f$  - respectivement la vitesse libre pour chaque voie ;
- $N_m$  - nombre de tronçons (segments) sur toute la section  $m$  de longueur uniforme
- $\lambda_m$  - nombre de voies sur la route principales ;
- $\alpha$  - paramètre du modèle du D.F.

La vitesse, pour une section, se détermine à partir de la densité des véhicules jusqu'à ce qu'elle arrive à une valeur d'équilibre (1.11) :

$$\frac{\partial v_{m,i}(x,t)}{\partial t} + v_{m,i}(x,t) \frac{\partial v_{m,i}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \underbrace{\{v_f(\rho_{m,i}(x,t)) - v_{m,i}(x,t)\}}_{\text{tendance vers la vitesse d'équilibre}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} v_f(\rho_{m,i}(x,t)) \frac{1}{\rho_{m,i}(x,t)} \frac{\partial \rho_{m,i}(x,t)}{\partial x}}_{\text{termes qui correspondent aux comportements individuels}} \quad (1.8)$$

Ci-dessous le modèle de base de deuxième ordre de Payne [Payne (1971)] et quelques modèles corrigées [Rasclé (2002)], [Zhang (1999)], [Papageorgiou (1983)].

### A) Modèle analytique du flux de trafic de PAYNE [Payne (1971)] -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour les systèmes équilibré LWR: } \rho_t + (\rho V(\rho))_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V(\rho))}{\partial x} = 0 \\ \text{Pour les systèmes non-équilibré: } V_t + VV_x = \frac{V_{eq}(\rho) - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \text{ où } c_0 > 0 \\ a(\rho(x,t)) = \frac{\partial V(\rho(x,t))}{\partial t} + V(\rho(x,t)) \frac{\partial V(\rho(x,t))}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_{eq}(\rho) - v) + \Psi \\ a(\rho(x,t)) = \frac{\partial V(\rho(x,t))}{\partial t} + V(\rho(x,t)) \frac{\partial V(\rho(x,t))}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\tau} (V_{eq}(\rho) - v) - \frac{1}{2\tau} V_{eq}(\rho) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\text{PAYNE}} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

L'allure de la loi de conservation des modèles du 2<sup>ème</sup> ordre est obtenue lors de la démonstration de Lagrange [Leclercq (2002)].

Ce premier modèle proposé par Payne [Payne (1971)] a été lui-même critiqué et a subi plusieurs modifications du fait de l'obtention de vitesses négatives lors des décélérations des véhicules [Rasclé (2002)], [Zhang (1998)], [Papageorgiou (1983)], [Kotsialos & al (1999)] etc.

**B) Modèle de ARZ (Aw-Rasclé)** [Rasclé (2002)] - le modèle ARZ (1.10) proposé par Aw-Rasclé cherche à trouver une solution au modèle du deuxième ordre par l'introduction d'une vitesse variable (problème de Riemann).

$$V_t + VV_x = \frac{V_{eq}(\rho) - V}{\tau} + \rho P'(\rho) V_x \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (V - \rho P'(\rho)) = \frac{1}{\tau} (V_{eq}(\rho) - V) \quad (1.10)$$

$p'(\rho)$  - pression liée au comportement du conducteur.

**C) Modèle de Zhang** [Zhang (1998)], [Zhang (1999)] - dans le modèle de Zhang (1.11) le problème de Riemann est résolu en négligeant le terme de relaxation

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (V + \rho V'_e(\rho)) = 0 \right. \quad (1.11)$$

**D) Modèles de Papageorgiou** [Papageorgiou (1983)] **et Kotsialos** [Kotsialos & al (1999)] -

Ce modèle est connu sous le vocable « Metanet ». Il est connu par sa présentation discrète comme c'est montré par (1.12)

$$\begin{aligned} v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \frac{\Delta T_{sim}}{\tau_m} \left[ \underbrace{V_{eq}(\rho_{m,i}(k))}_{D.F.} - v_{m,i}(k) \right] + \\ + \frac{\Delta T_{sim}}{l_{m,i}} v_{m,i}(k) [v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)] - \frac{v_m \Delta T_{sim} [\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)]}{\tau_m l_{m,i} [\rho_{m,i}(k) + k_m]} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Le modèle utilise les variables : **la densité** -  $\rho_{m,i}(k)$  [véh/km/lane]; **la vitesse du flux** -  $V_{m,i}(k)$  [km/h]; **le débit du flux** -  $q_{m,i}(k)$  [véh/h];

Les modèles analytiques qui expriment un changement de la géométrie de la route, qui s'ajoutent dans l'équation de base de la vitesse de Payne sont présentés sous forme discrète dans l'Annexe 1 (A.1.6) - (A.1.8).

En générale les modèles de deuxième ordre ont été constitués pour prévoir le trafic en dehors de leurs états d'équilibre. Leur principal avantage est qu'ils modélisent l'apparition et l'évolution de phénomènes lorsque le trafic varie son état. Cependant leur complexité de solution analytique et le fait qu'ils ne proposent pas une modélisation plus réaliste des phases transitoires par rapport au modèle LWR, nous éloigne de leur utilisation dans les travaux désormais.

Il faut dire que, quel que soit l'ordre des modèles macroscopiques, les travaux de recherches menés dans le domaine des flux de trafic routier sont toujours liés : aux problèmes de congestions, à la tendance de les diminuer, au temps de trajet sur une section ect, sous la condition de maintenir à tout moment un état d'équilibre [Bellemans (2003)], en agissant sur les variable du modèle. D'ici la nécessité d'introduire quelques contraintes, tel que la circulation soit fluide, en tout instant et en tout point. Pour les calculs de la solution de la fonction de transfert du modèle LWR (voir Chapitre.II) nous utilisons ces contraintes.

- **Limitation du débit sur la voie principale au dessous de sa valeur maximale.**

C'est la condition de circulation dans la zone fluide (1.13).

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &\leq \rho_{cr} \\ \rho(x, t) &\leq 0.5\rho_{\max} \quad - \text{selon le DF de Greenschild} \\ V(x, t) &\geq V_f \left( 1 - \frac{0.5\rho_{\max}}{\rho_{\max}} \right) \geq 0.5V_f \\ V(x, t) &= [V_f \div 0.5V_f] \Rightarrow \text{pour } V_{\text{critique}} = 0.5V_f \Rightarrow \rho(x, t) = \rho_{cr} \end{aligned} \quad (1.13)$$

- **Vitesse du flux maximale - contrainte de vitesse maximale de circulation (1.14):**

$$V(x, t) = V_f \rho(x, t) \Rightarrow \rho(x, t) \rightarrow 1, \left( 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{\max}} \right) \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho_{\max}} \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(t) \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow V_f \quad (1.14)$$

## I.5. Conclusion

L'objectif de ce premier chapitre était de présenter un état de l'art sur les différents modèles des flux de trafic routier, non seulement pour mettre point sur le domaine de l'articulation de toutes les études et les travaux dans la présente thèse, mais pour nous aider à faire le choix sur le modèle qui va être utilisé dans le cadre de nos applications.

Avec ce chapitre nous avons eu l'idée de présenter qu'il existe plusieurs types de modèles, qui se distinguent par leurs finesses de reproduire l'écoulement des véhicules. Ainsi que chaque modèle permet une présentation plus au moins simplifié et se caractérise par une facilité d'appréhension et mise en œuvre plus au moins grande. Choisir un modèle de trafic, pour une application donnée, consiste donc à déterminer le bon équilibre entre l'échelle souhaitée de présentation des phénomènes et la complexité du modèle retenu. Ce choix est d'autant plus délicat que plus le modèle est complexe, plus il est difficile de garantir que la présentation de l'écoulement fournie par celui-ci correspond bien à celle que la formulation laisse espérer. Alors, le modèle choisi doit être capable de reproduire correctement les processus avec leurs

phénomènes, mais est-ce que c'est suffisant pour sélectionner le modèle. La cohérence des solutions et la maîtrise de sa complexité sont des éléments tout aussi importants. Nous pouvons dire que les modèles macroscopiques sont des modèles qui proposent une vision agrégée du trafic, corrélable avec le comportement moyenne du flux, tout en conservant une représentation de la vitesse.

C'est vrai que le modèle de premier ordre ne nous permet pas de se rendre compte aux accélérations et aux décélérations et sans pouvoir modéliser les phénomènes de transition il limite l'utilisation de la vitesse comme une variable fondamentale. Malgré ça, dans le cadre de cette thèse, le choix est porté sur le modèle LWR à cause des atouts suivantes : sa cohérence par rapport aux limites physique du réseau, qui rend le modèle assez robuste concernant ces variables (densité et débit) et l'existence d'une solution analytique, qui permet l'étude du modèle et de maîtriser sa complexité.

Pourtant, l'aspect le plus important pour le choix du modèle LWR, devant un modèle de deuxième ordre, était prouvé par Del Castillo valable aussi dans notre cas d'étude [Del Castillo et al. (1995)], [Leclercq (2002)]. Il s'agit de redémarrage à un feu tricolore, mais c'est valable quand nous avons le redémarrage après les barrières de péage sur l'autoroute. Dans ce cas d'étude de part et d'autre de la barrière de péage, nous avons des conditions de trafic à l'équilibre avec :  $(\rho_{max}, 0)$  une vitesse nulle et une densité maximale en amont des barrières et avec  $(0, V_{f_{max}})$  une densité nulle et une vitesse libre maximale en aval. Dans ce cas le modèle de deuxième ordre se comporte comme un modèle LWR. Alors dans le cas d'une condition initiale, qui correspond à un état d'équilibre comme c'est le cas d'étude, la solution va être identique à celle du modèle LWR.

En regardant de près nos objectifs et suite de la validation du choix du modèle LWR, il reste à continuer nos recherches dans le sens d'obtenir un modèle, qui sera une présentation simplifiée et opératoire de ce phénomène physique évolutif du trafic routier. Pour le modèle macroscopique du trafic routier LWR, nous retrouvons un modèle analytique, qui est représenté par une équation hyperbolique non linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre. Comment résoudre cette équation, en appliquant une méthode algébrique, afin de déduire la fonction de transfert du modèle, sera l'objectif du chapitre à venir.

# CHAPITRE II: RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSPORT « LWR »

## Etat de l'art et étude de la Résolution analytique de l'équation LWR

### II.1. Résolution de l'EDP – du modèle LWR.

#### II.1.1. Méthodes numériques

#### II.1.2. Méthodes analytiques

### II.2. Méthode de résolution par la fonction de Green du modèle LWR de flux de trafic routier

#### II.2.1. La fonction de Green

#### II.2.2. Contraintes et conditions du modèle

#### II.2.3. Résolution de l'intégrale générale

### II.3. Validation des résultats

### II.4. Exemple de simulation du modèle et étude du modèle LWR de flux de trafic routier

### II.5. Conclusions

Le chapitre précédent a montré que les systèmes de flux de trafic routier peuvent être décrits à l'aide de modèles macroscopiques issus de la théorie de la dynamique des fluides. Le modèle "LWR" bien que simple et présentant certains défauts reste un modèle largement utilisé et qui a donc été retenu dans le cadre de la présente étude. Il dépend de deux variables : du temps et de l'espace. Il s'agit d'un *système à paramètres distribués* représenté par une équation aux dérivées partielles (EDP).

L'étude de la commande des systèmes, en général, impose que l'on puisse atteindre certaines performances de ces systèmes tout en satisfaisant des contraintes de stabilité. L'étude de la stabilité des systèmes repose sur différentes techniques conduisant toutes à vérifier l'annulation de l'effet des conditions initiales sur l'évolution du système en un temps en théorie infini, en pratique le plus court possible. L'une de ces techniques consiste à étudier les éléments caractéristiques de la fonction de transfert du système. Cette fonction de transfert peut être obtenue facilement à partir d'une équation différentielle aux dérivées ordinaires linéaire en passant par la transformée de Laplace. En revanche l'étude devient plus complexe lorsqu'il s'agit d'une EDP, qui plus est lorsque cette EDP est non linéaire. Ce chapitre a pour objectif d'obtenir

une représentation sous forme de fonction de transfert d'un système de flux de trafic routier justement décrit par une équation aux dérivées partielles non linéaire.

L'approche proposée consiste à utiliser une méthode de résolution de l'équation analytique aux dérivées partielles à l'aide de la «fonction de Green ». Toutefois cette approche nécessitera de linéariser le système étudié autour d'un point de fonctionnement.

## II.1. Résolution des EDP – de l'équation LWR

La résolution des équations aux dérivées ordinaires linéaires ne posent généralement pas de grandes difficultés. La solution peut être trouvée dans un sens direct par la résolution de l'intégrale générale et ne dépend que des conditions initiales. Par contre, quand un processus est décrit par une EDP, la solution dépend des conditions initiales et des conditions aux limites.

Plusieurs processus connus sont décrits par des équations aux dérivées partielles, c'est ainsi que l'on peut trouver dans des domaines très différents des équations de ce type étudiées dans la littérature :

$$- \text{Équation de la chaleur : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad (2.1)$$

$$- \text{Équation d'onde : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad (2.2)$$

$$- \text{Équation de transport (trafic) : } \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ où } u_t + a(u)u_x = 0; \quad (2.3)$$

$$- \text{Équation de Burger pour le flux de trafic : } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ où } u_t + uu_x = 0; \quad (2.4)$$

$$- \text{Équation du télégraphiste : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + mu = 0 \text{ où } ; \quad (2.5)$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \alpha u_t + mu = 0$$

Dans le cas des systèmes de flux de trafic routier, le modèle macroscopique LWR du flux de trafic retenu pour cette étude, présenté par l'équation (1.7) [Lighthill et al. (1955)], [Richards (1956)], [Rascle (2002)], [Lebacque et al. (1999)] s'apparente à une équation de transport qui exprime la répartition des véhicules sur une section de la route avec une vitesse dépendante de sa densité. Le modèle LWR est décrit par une équation aux dérivées partielles non linéaire homogène.

Il existe deux grandes méthodes de résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques (Fig.2.1).

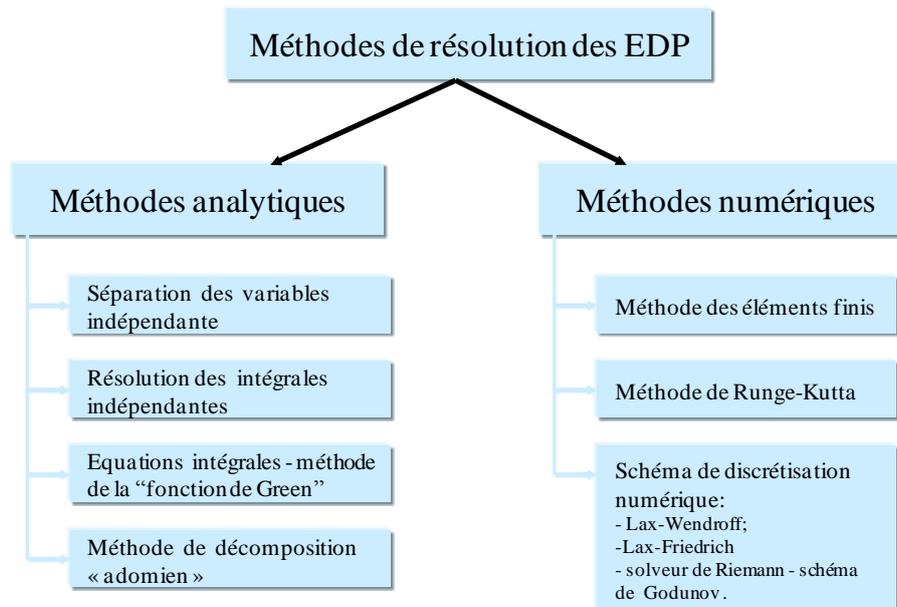


Fig.2.1. Méthodes de résolution des équations différentielles

Nous allons utiliser dans notre étude une méthode analytique de résolution des EDP qui est rarement utilisée dans le domaine de l'Automatique du fait de son apparente complexité. Avant de présenter et de développer la méthode analytique de résolution de l'équation de LWR nous pouvons noter quelques méthodes numériques qui ont prouvé leur utilité pour résoudre le même type d'équations.

### II.1.1. Méthodes numériques

Les méthodes les plus courantes de résolution numériques [Goncalves (2004)], [Kachroo (2000)], [Neta (2003)] sur lesquelles reposent les études des systèmes de flux de trafic routier sont :

- a) Les éléments finis.
- b) La discrétisation temporelle :
  - Méthode de Runge-Kutta – discrétisation temporelle ;
  - Méthode de série de TAYLOR.
- c) La discrétisation spatio-temporelle : schéma numérique aux différences finies :
  - Pour les modèles du 1<sup>er</sup> ordre - schéma de Lax-Friedrichs, schéma de Godounov en utilisant la concentration
  - Pour les modèles du 2<sup>ème</sup> ordre en utilisant le couple concentration-vitesse qui donne une solution plus précise que par le schéma de Lax-Friedrichs ou le schéma de Godounov.

Un exemple de calcul reposant sur une méthode numérique est présenté dans l'annexe 2.

### II.1.2. Méthodes analytiques

Avant d'aborder la résolution de l'équation du trafic dans le cadre de notre étude, il est

important de préciser que l'utilisation de méthodes de résolution analytiques, présentent une certaine analogie avec les méthodes numériques du fait qu'elles donnent une solution de nature distribuée. Cependant ces deux approches de résolution ne présentent pas les mêmes inconvénients. Si les méthodes numériques restent assez simples à mettre en œuvre et permettent de s'affranchir des non linéarités, elles ne donnent des solutions qu'au travers de simulations, l'utilisation d'une méthode analytique en revanche permet d'obtenir des expressions continues du temps et d'envisager de trouver une fonction de transfert du processus étudié. Il reste aussi à remarquer que les solutions analytiques n'existent pas toujours ou elles peuvent être très difficiles à trouver. Dans le cas présent, il est notamment nécessaire de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement correspondant à une vitesse où à une densité choisie.

D'autres techniques de résolution existent, notamment la méthode de séparation des variables indépendantes et la méthode des caractéristiques, ces méthodes sont présentées dans l'annexe 2. Précisons toutefois que ces méthodes ne permettent également pas de déterminer la fonction de transfert distribuée correspondant au processus physique étudié. Elles ne nous permettrons donc pas d'atteindre l'objectif que nous nous sommes fixés.

Dans le cas stationnaire, l'équation non-linéaire du trafic se transforme en une équation quasi-linéaire, connue comme l'équation de convection pure. La solution de cette équation produit des courbes caractéristiques (des droites parallèles, qui correspondent à une vitesse constante le long de l'axe du temps). Dans l'annexe 2 nous avons présenté quatre cas différents de contraintes de vitesse, selon lesquels nous obtenons différents résultats et à partir desquels nous pouvons conclure que le résultat sera une translation de la condition initiale [Sanwal K. et al. (1996)] le long du temps et de l'espace. Dans le même sens, l'exemple présenté sur la figure.2.2 montre une condition initiale (demande ou consigne), que nous allons retrouver tardivement à l'entrée, définie par un retard dans le temps et dans l'espace.

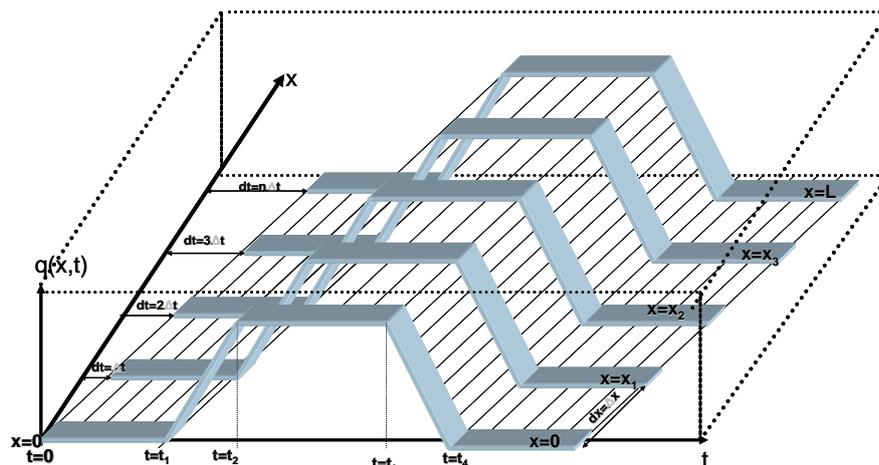


Fig.2.2 Distribution de la densité dans le cas d'une demande (consigne) trapézoïdale

Comme nous avons précisé dans le paragraphe 2.1, les méthodes analytiques classiques proposent une solution sans donner la fonction de transfert souhaitée. Le but poursuivi est non seulement de chercher à résoudre l'EDP, mais aussi de prendre en compte la distribution du

trafic et d'obtenir la fonction de transfert de ce modèle distribué, par la recherche de la « fonction de Green » associée [Duffy Dean G. 2001], [Wang S., Xu M., Li X. 2007] [Kadanoff L. P et al. 1962], [Stakgold I. 1979], [Smoller (1994)], [Frank T.D. 2008], [Valdes-Parada et al. (2008)], [Fried H.M. (2002)].

## II.2. Méthode de résolution par la fonction de Green pour le modèle LWR du flux de trafic routier

### II.2.1. La fonction de Green

La fonction de Green est une méthode de résolution des équations non homogènes aux conditions limites (boundary conditions - B.C.), en se basant sur la théorie des distributions et des sources ponctuelles. Elle représente une réponse impulsionnelle à un instant  $t$  en un point  $x$  de l'espace quand une source est appliquée en un point  $x_0$  de l'espace à l'instant  $t_0$  et tel que  $t > t_0$  [Haberman R. (1987)], [Arfken G. et al. (2001)], [Wang S., Xu M., Li X. (2007)] et [Panza M. (2008)].

L'usage des fonctions de Green est très fréquent en physique notamment, lorsqu'il s'agit de résoudre des équations aux dérivées partielles. La Fonction de Green a été initialement utilisée pour résoudre des problèmes dans le domaine de l'électrostatique. Cette théorie a ensuite été développée pour résoudre des phénomènes de propagation dans le cadre de la dynamique des fluides et de la théorie des champs quantiques.

De nombreuses références bibliographiques décrivent en détail la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles par la fonction de Green, [Tiablikov-Bruevitch (1961)], [Kadanoff-Baym (1962)], [Butkovskij (1979)], [Stakgold (1979)], [Бицадзе (1982)], [Levitov-Shitov (2000)], [Duffy (2001)], [Mandelis (2001)] (voir II.2 et II.3).

La fonction de Green d'une équation aux dérivées partielles peut être obtenue de deux manières différentes : en utilisant la transformée de Laplace (Fourier) et la transformée inverse ou par la formule variationnelle de Hadamard, [J. Hadamard (1968)] [Butkovskij 1979], [Warschawski (1960)], [Bergman et al. (1953)], (l'idée générale de cette deuxième approche est présentée en Annexe 3). Seule la première approche sera développée ci-après.

La méthode développée ci-dessous, se base sur la résolution de l'intégrale de Fourier pour identifier l'effet distributif d'un déplacement à partir d'un point de fonctionnement vers un autre en utilisant le passage d'espace fonctionnel à l'espace opérationnel. Dans ce cas, nous avons une source potentielle de type Dirac  $\delta$ -fonction (fonction impulsionnelle) dans le temps et dans l'espace monodirectionnel (2.8). Les propriétés de la fonction de Dirac liées à la fonction de Green sont présentées dans l'annexe 3.

Le principal atout de la méthode est de présenter une équation différentielle comme un produit de convolution d'un opérateur différentiel  $D$  et de la fonction décrivant le système  $\varphi(x)$  (dans notre cas il s'agit de la densité). Nous pouvons résoudre ce problème aussi, en déterminant

l'inverse de convolution de cet opérateur appelée « fonction de Green » [Fliess M. (1999)]. D'autre part, le produit de convolution de deux fonctions correspond à la multiplication de leurs transformées de Fourier (de Laplace) et au calcul de la transformée inverse du produit. Dans ce sens, la solution de l'équation différentielle en un point de l'espace (dans le cas stationnaire) peut être exprimé par le produit d'un opérateur différentiel  $D$  avec une fonction  $\varphi(x)$ , solution finale de notre équation (2.6), égale à une autre fonction dite source  $j(x)$  tel que (2.7):

$$D\varphi(x) = j(x) \quad (2.6)$$

$$\varphi(x) = (G * j)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)j(y)dy \quad (2.7)$$

Ainsi, on transforme cette fonction en « fonction de Green » sous la condition que la source est une fonction de Dirac (2.8):

$$EDO: \begin{cases} DG(x) = \delta(x) \\ DG(x-y) = \delta(x-y) \end{cases}, \quad EDP: \begin{cases} DG(x,t) = \delta(x)\delta(t) \\ DG(x-y,t-\tau) = \delta(x-y)\delta(t-\tau) \end{cases} \quad (2.8)$$

Quand nous avons une source de type impulsion nous obtenons directement la fonction Green par la résolution de l'équation différentielle. La solution s'obtient à partir des conditions initiales pour une équation aux dérivées ordinaires (Annexe 3), en utilisant la transformée de Laplace et à la base des conditions initiales et aux limites pour les EDP, en utilisant la transformée de Laplace et de Fourier. La solution de cette équation représente alors la réponse en un point  $x_1$  à partir d'une source impulsionnelle qui est produite en un autre point  $x_0$ . Si nous prenons le cas d'une EDP homogène, en lui associant une source distribuée pour résoudre l'équation non homogène, nous décomposons la source distribuée en plusieurs groupes de sources concentrées locales [Arfken G. et al. (2001)]. C'est-à-dire que nous divisons l'intervalle spatial en plusieurs sous intervalles, nous observons alors le déplacement de notre fonction le long des sous intervalles. Puisque la « fonction de Green » exprime l'influence des conditions initiales  $t_0=0$  en un point initial  $x_0$  et un autre de l'espace  $x$  dans une période  $t$ , Il est alors possible de dire que cette méthode est dépendante essentiellement de la différence entre  $t-t_0$  [Haberman R. (1987)].

## II.2.2. Contraintes et conditions aux limites du modèle

Il est important de définir les conditions aux limites de l'équation différentielle, car la fonction de Green recherchée dépend de ces conditions aux limites (pour le cas non-homogène). Ainsi pour chaque état d'équilibre (point stationnaire du D.F.) il existe une fonction de transfert différente (qui correspond à différentes situations routières) dépendante de l'ensemble des paramètres qui définissent le système étudié, notamment de densité, de vitesse, de longueur du segment routier.

Dans le cas de notre étude, le flux est considéré comme homogène pour tout le segment routier. Le choix de la condition initiale ( $t=0$ ) et aux limites ( $x=0, x=L$ ) est décrit dans (2.9) :

$$a(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + c(x,t)Q(x,t) = f(x,t) \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow Q(x,0) = Q_0(x) = 0 \\ \rightarrow Q(0,t) = Q(L,t) = g(t) = 0 \\ x \geq 0, t \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0 \end{cases}$$

(2.9)

Le choix des conditions initiales, dépend du modèle physique qu'on veut représenter. Dans la plupart des cas observés et des situations routières les conditions initiales ne peuvent pas être considérées comme étant nulles. Ceci est dû au fait qu'en tout point de l'autoroute, il existe toujours des véhicules, ce qui suppose bien que les conditions ne peuvent pas être nulles. Cependant il existe des modèles pour lesquels les conditions initiales peuvent être nulles tout en étant conformes à la réalité. Cela correspond à la modélisation des phénomènes de redémarrage : à un feu, après un péage routier etc. Le travail présenté dans ce manuscrit correspond à une situation décrite dans le segment routier en aval d'un péage sur une autoroute. La densité peut en effet être considérée comme étant nulle à l'intérieur de ce segment du fait du redémarrage des véhicules après le péage.

### II.2.3. Résolution de l'intégrale générale par les transformées de Laplace et Fourier

La méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles par la fonction de Green consiste à suivre les étapes suivantes :

- Obtention d'une EDP en associant au modèle LWR l'équation du D.F. de Greenshield (2.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V(x,t)\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \rho(x,t) = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V_f \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial V_f \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right)}{\partial x} \rho(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

- Choix des conditions initiales et aux limites (2.11) : nous supposons toujours une densité nulle dans le segment routier après les barrières, ce qui implique les conditions initiales nulles.

$$\begin{cases} \rho(x,0) = \rho_0(x) = 0, & t \geq 0 \\ \rho(0,t) = \rho(L,t) = \rho(t) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.11)$$

- Linéarisation autour d'un point de fonctionnement du système : hypothèse (A.2.19) de choix de vitesse libre (Annexe 2) pour un point d'équilibre du modèle dans la zone fluide du D.F.

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &< \rho_{cr} \\ \rho(x, t) &\leq 0.5\rho_{\max} \quad - \text{selon le DF de Greenschild} \\ V(x, t) &\geq V_f \left( 1 - \frac{0.5\rho_{\max}}{\rho_{\max}} \right) \geq 0.5V_f \\ V(x, t) &= [V_f \div 0.5V_f] \\ V_{critique} &= 0.5V_f\end{aligned}$$

- Changement de la fonction de la densité par la “fonction de Green” (encore inconnue à ce stade du calcul) en appliquant une source impulsionnelle (2.12).

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial}{\partial t} + 0.5V_f \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho(x, t) &= j(x, t), \quad j(x, t) = 0 \\ D\rho(x, t) &= j(x, t), \quad j(x, t) = 0 \\ \text{alors,} & \\ DG(x, x_0, t, \tau) &= \delta(x - x_0)\delta(t - \tau) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + 0.5V_f \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, x_0, t, \tau) &= \delta(x - x_0)\delta(t - \tau)\end{aligned}\tag{2.12}$$

- Application de la transformée de Laplace pour l'équation différentielle fonction des conditions initiales. La transformée de Laplace joue le rôle d'un opérateur intégrale du noyau pour passer à une forme opérationnelle sous la condition initiale (2.13) :

$$\begin{aligned}\left( p + 0.5V_f \frac{d}{dx} \right) G(x, x_0, p) &= \delta(x - x_0)e^{-p\tau} + \rho_0(x, 0) \\ \rho_0(x, 0) &= 0 \text{ selon la condition initiale}\end{aligned}\tag{2.13}$$

- Passage vers une EDO :

$$\begin{aligned}\left( p + 0.5V_f \frac{d}{dx} \right) G(x, x_0, p) &= \delta(x - x_0)e^{-p\tau} \\ G(x, x_0, p)e^{p\tau} = \hat{G}(x, x_0, p) &\Rightarrow \left( p + 0.5V_f \frac{d}{dx} \right) \hat{G}(x, x_0, p) = \delta(x - x_0)\end{aligned}\tag{2.14}$$

- Intégration selon la variable spatiale (transformée de Fourier par rapport à  $x$ ) :  
Pour obtenir le produit de la fonction de Green et de l'opérateur (2.15), l'intégration par rapport à  $x$  est effectuée ou une équivalence à l'application d'une transformée de Fourier par rapport à  $x$ . On substitue le résultat de façon à ce que l'on obtienne (2.16) :

$$\left( p \hat{G}(x, x_0, p) \right) + \left( 0.5V_f \frac{d\hat{G}(x, x_0, p)}{dx} \right) = \delta(x - x_0)\tag{2.15}$$

$$TF: x \rightarrow f \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( p \hat{G}(x, x_0, p) \right) e^{-i2\pi f x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left( 0.5V_f \frac{d\hat{G}(x, x_0, p)}{dx} \right) e^{-i2\pi f x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-i2\pi f x} dx$$

$$\left( p \hat{G}(f, x_0, p) \right) + \left( 0.5V_f (i2\pi f) \hat{G}(f, x_0, p) \right) = e^{-i2\pi f x_0}\tag{2.16}$$

- Séparation de la fonction de l'opérateur différentiel à partir de (2.17.1) pour obtenir (2.17.2):

$$\begin{aligned} (p + 0.5V_f(i2\pi f))\hat{G}(f, x_0, p) &= e^{-i2\pi f x_0} \\ \hat{G}(f, x_0, p) &= \frac{e^{-i2\pi f x_0}}{(p + 0.5V_f(i2\pi f))} \end{aligned} \quad (2.17.1)$$

$$G(f, x_0, p) = \frac{e^{-i2\pi f x_0}}{(p + 0.5V_f(i2\pi f))} e^{-p\tau} = \frac{\frac{1}{0.5V_f}}{\left(\frac{1}{0.5V_f} p + (i2\pi f)\right)} e^{-p\tau} e^{-i2\pi f x_0} \quad (2.17.2)$$

- Application de la transformée inverse de Fourier (2.18) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(f, x_0, p) e^{i2\pi f x} df &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p + 0.5V_f(i2\pi f))} e^{-i2\pi f x_0} e^{i2\pi f x} df \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(f, x_0, p) e^{i2\pi f x} df &= \frac{1}{0.5V_f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{0.5V_f} + (i2\pi f)\right)} e^{-i2\pi f x_0} e^{i2\pi f x} df \end{aligned} \quad (2.18)$$

En utilisant la transformée de Fourier nous obtenons le résultat (2.19) pour la fonction de Green, ensuite nous passons à l'équation (2.19.2) après avoir remplacé la fonction de (2.19.1) :

$$\hat{G}(x, x_0, p) = \frac{1}{0.5V_f} u(x - x_0) e^{-\frac{p}{0.5V_f} x - x_0} \quad (2.19)$$

$$u(x - x_0) = 1 - \text{échelon unitaire distribué}$$

$$\hat{G}(x, x_0, p) = G(x, x_0, p) e^{-p\tau} \quad (2.19.1)$$

$$G(x, x_0, p) = \frac{1}{0.5V_f} u(x - x_0) e^{-p\left(\frac{x-x_0-0.5V_f\tau}{0.5V_f}\right)} \quad (2.19.2)$$

Sous forme généralisé le résultat de l'équation (2.19.2) est présentée par la relation (2.19.3), où la vitesse est donnée par  $V(x, t)$ , qui représente la fonction de transfert recherchée.

$$G(x, x_0, p) = \frac{1}{V(x, p)} u(x - x_0) e^{-p\left(\frac{x-x_0-V(x,p)\tau}{V(x,p)}\right)} \Rightarrow G(x, x_0, p) = \frac{1}{V(x, p)} u(x - x_0) e^{-p\left(\frac{x-x_0}{V(x,p)}\right)} e^{p\tau} \quad (2.19.3)$$

- L'application de la transformée inverse de Laplace permet d'obtenir la fonction de Green en fonction du temps et de l'espace (2.20).

$$G(x, x_0, t, \tau) = \frac{1}{0.5V_f} u(x - x_0) \delta\left(t - \frac{(x - x_0) - 0.5V_f\tau}{0.5V_f}\right) \quad (2.20)$$

Il existe une solution, pour les systèmes à paramètres distribués, proposée par [Butkovskij (1979)] pour tous types d'équations différentielles par la méthode de la « fonction de Green ».

Cette méthode utilise la forme variationnelle de Hadamard (Annexe 3).

### II.3. Validation des résultats

L'objectif de cette section est de valider les résultats obtenus par la fonction de Green et de les comparer avec ceux obtenus par les méthodes numériques.

Nous utilisons la théorie des ondes de choc, qui se propagent avec une vitesse constante, [Winckelmann G. (2007)], pour la comparer avec le modèle LWR dans le cas d'une vitesse constante (A.2.19) qui correspond à la solution de l'équation de convection pure (2.21).

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

A partir du modèle LWR, on cherche à trouver la dérivée de la fonction de l'EDP par rapport au temps pour une famille de courbes caractéristiques. Au moment où la dérivée s'annule on obtient la résolution de l'EDP et on la transforme en un système d'EDO. La solution de l'équation [Kadanoff-Baym (1962)] avec les conditions initiale et aux limites est présentée ci-dessous par (2.22) :

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x,0) = w(x) = e^{ix} \\ \rho(x,t) = w(x-ct), V = c \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(x,t) = e^{ix} e^{-itc} \Rightarrow \rho(x_j, t_n) = e^{ix_j} e^{-it_n c} \quad (2.22)$$

A partir du résultat obtenu (2.22) on peut conclure que les conditions initiales se propagent le long de l'axe monodirectionnel de l'espace avec une vitesse constante dans le cas de résolution numérique (voir [<http://iacs.epfl.ch/asn/Support/support/node112.html>]). La condition initiale qui est un signal d'entrée de type échelon, se déplaçant sans déformation dans le temps et dans l'espace. Ce résultat donne un transport des conditions initiales avec une vitesse constante et implique le même résultat obtenu par la méthode de Green. Un tel signal correspond à une demande (débit d'entrée) de type échelon à l'entrée d'un segment d'autoroute. Chaque signal d'entrée représente une demande sur la section de la route. On retrouve le même signal à la sortie mais retardé dans le temps (Fig.2.3).

Cependant, pour les solutions obtenues à partir des méthodes numériques, il est important de faire le choix sur les pas de discrétisation spatiale et temporelle (2.23) pour avoir un processus stable pour tout intervalle de temps et tout au long de la section de route. Il s'agit alors de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy de stabilité d'un système distribué. On peut ajouter plusieurs contraintes sur le choix des pas de discrétisation [Leclercq (2002)] mais on se limite à présenter la contrainte (2.24). Le pas de discrétisation temporelle assure une distance minimale inter véhiculaire limitant la densité au-dessous de sa valeur maximale. De cette façon on retrouve l'ensemble des véhicules dans chaque segment à chaque itération dans le temps.

$$|V| \leq \frac{h}{\tau} \leq 1, \text{ où } \begin{cases} h - \text{pas spatial} \\ \tau - \text{pas temporel} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\tau \leq \frac{1}{\rho_{\max} V_{f \text{ critique}}} \quad (2.24)$$

Dans le cas général (conditions initiales nulles pour l'équation de convection pure) nous trouvons des courbes caractéristiques droites : solutions de notre équation stationnaire. La pente de ces droites est définie par la valeur constante de la vitesse  $c$ . La solution (2.22) est constante pour toutes ces droites (Fig.2.3).

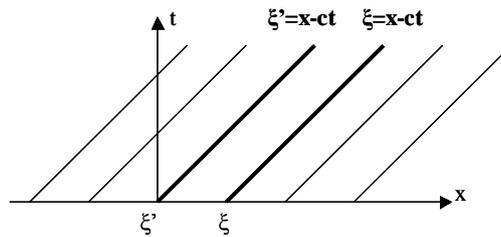


Fig.2.3. Solution de PDE a une vitesse constante  $c$ .

Pour la méthode des caractéristiques des EDP quasi-linéaires le coefficient  $c$  exprime la vitesse. Si celle-ci dépend de la densité  $c=f(\rho)$ , nous retrouvons une équation non linéaire, mais dans le cas où  $c$  est une constante l'EDP se transforme en équation linéaire. Dans ce dernier cas stationnaire nous avons la solution pour un point d'équilibre du diagramme fondamental.

A l'aide de la méthode des caractéristiques nous avons cette solution pour le cas stationnaire représentée par des lignes droites avec une possibilité de non-parallélisme selon la valeur de la vitesse [Haberman et al. (1987)].

Quant nous parlons de solutions représentées par des lignes droite nous devons présenter les deux phénomènes, reliés aux flux de trafic, des ondes de chocs et des éventails. Pour une même densité initiale et différentes valeurs de la vitesse, nous avons des lignes avec le même point de départ mais qui sont de pentes distinctes. Il s'agit du phénomène d'éventails quand on arrive à un point où la densité est plus importante et que les ondes (le flux de véhicules) se déplacent avec une faible vitesse (Fig.2.4), jusqu'à atteindre  $V=V_1$  et  $\rho=\rho_1$ . Dans ce cas, les caractéristiques de la solution sont des droites parallèles. Après avoir eu un changement de vitesse ( $V=V_2$ ,  $\rho=\rho_2$ ) nous obtenons une nouvelle famille de courbes caractéristiques avec une pente qui dépend de la nouvelle vitesse (densité):

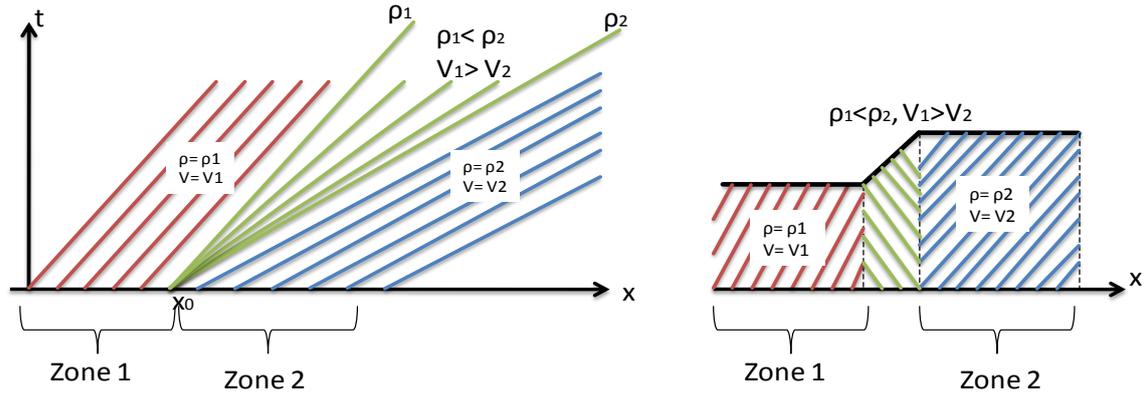


Fig. 2.4. Caractéristiques de la distribution des ondes de véhicules sur un segment routier (éventail)

Contrairement à ce phénomène, nous avons celui des ondes de choc. Elle correspond à une onde plus rapide qui rejoint une autre plus lente (Fig.2.5).

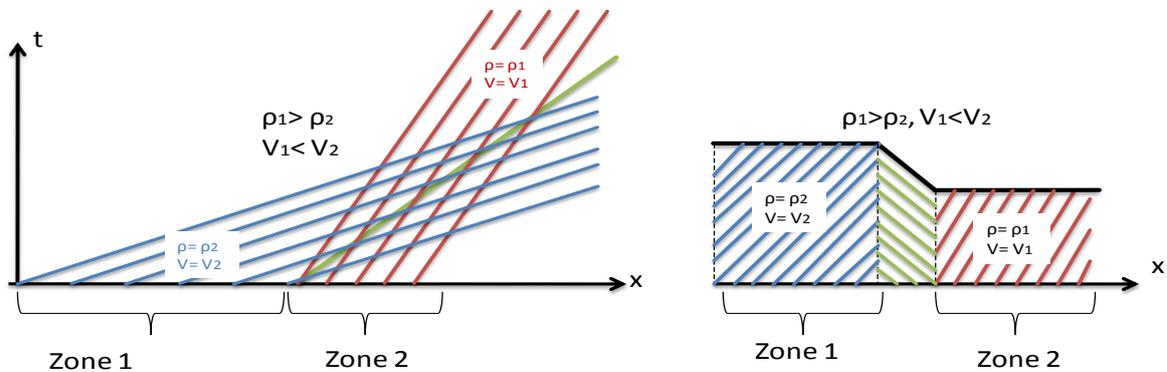


Fig. 2.5. Caractéristiques de la distribution des ondes de véhicules sur un segment routier (onde de choc)

La conclusion est que le groupe de véhicules se déplace sans perte dans l'espace, dans le cas d'une vitesse constante. Cela correspond à une fonction de transfert de type retard pur dépendante de la vitesse libre, de la densité, du temps et de l'espace, qui revient à obtenir le même résultat que celui obtenu par la méthode de la fonction de Green.

## II.4. Exemple de simulation du modèle et étude du modèle LWR du flux de trafic routier

Nous allons ci-dessous exploiter le résultat obtenu en (2.25) et en effectuer une étude sur la base de simulations à l'aide de l'outil Matlab/Simulink

$$G(x, x_0, p) = \frac{1}{0.5V_f} u(x - x_0) e^{-p \left( \frac{x - x_0 - 0.5V_f \tau}{0.5V_f} \right)} \quad (2.25)$$

Nous allons commencer par convertir la fonction de transfert irrationnelle en une forme rationnelle. Pour cela il faut passer d'une représentation avec des paramètres du modèle de LWR ( $V_f$ ,  $L$ ,  $x$ ,  $x_0$  et  $\tau$ ) à une présentation avec des paramètres qui décrivent un processus ( $k$ ,  $T$ ,  $\tau$ )

(2.26) :

$$\begin{aligned}
 e^{-pa} &\triangleq \frac{n^n}{(n+ap)^n} \triangleq \left(1 + \frac{a}{2}p\right)^{-n}, & (n \geq 2) \\
 e^{-pa} &\triangleq_{\{n=2\}} \frac{2^2}{(2+ap)^2} \equiv \frac{4}{(2+ap)(2+ap)} \equiv \frac{4}{2\left(1+\frac{a}{2}p\right)2\left(1+\frac{a}{2}p\right)} \equiv \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2}p\right)^2} \\
 e^{-pa} &\triangleq_{\{n=2\}} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{4}p^2 + ap + 1\right)}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Cependant le problème le plus important à résoudre, concernant les systèmes de flux de trafic, reste le contrôle des congestions sur les voies rapides qu'il s'agit d'éviter afin d'assurer la fluidité du trafic autoroutier. Cette condition de fluidité sera recherchée et respectée dans toutes les études que nous avons réalisées, elle joue le rôle d'une contrainte. Les systèmes de flux de trafic sont dans une certaine mesure incertaine du fait de la possibilité de voir des changements non prévisibles des paramètres à tout moment et en chaque position de l'espace. Ces changements imprévus sont le plus souvent causés par les congestions, les rampes d'entrées, les rétrécissements etc. Nous avons donc étudié le système de flux de trafic pour chaque condition de circulation en faisant varier les paramètres de densité, débit et vitesse libre, sous la contrainte de fluidité du trafic.

Nous avons tout d'abord fait le choix de fixer les paramètres du système correspondant à un état nominal, correspondant à notre « modèle de référence ». Le balayage des paramètres densité, débit et vitesse libre nous a permis d'obtenir un ensemble de modèles, constituant ainsi une famille de modèles perturbés. Le passage du modèle de référence aux modèles perturbés peut être provoqué par des perturbations internes et externes, qui influencent et provoquent un changement des paramètres du modèle LWR.

Dans le cas de notre étude du modèle LWR il nous faut choisir ce modèle de référence, en respectant la contrainte du flux de trafic routier non-congestionné. Cette contrainte impose un point de fonctionnement situé dans une zone fluide du diagramme fondamental de Greenschild (Fig.2.6) qui correspond à une vitesse libre de circulation (2.27) et une densité inférieure à la densité critique (2.28). Tout cela tient au fait que la contrainte d'une limitation de la densité au-dessous de sa valeur critique permet d'obtenir un système toujours stable. Dans l'étude présentée ici, la stabilité est étudiée par l'intermédiaire de l'analyse des réponses temporelles et harmoniques du modèle.

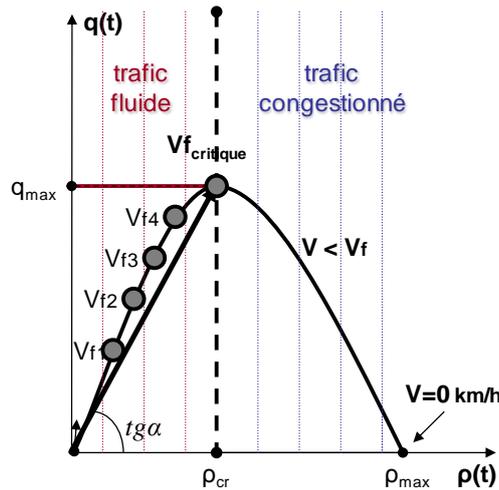


Fig.2.6. Zone de choix des paramètres de variation – contrainte de fluidité sur le D.F.

$$V = V_f \rho(x,t) \Rightarrow \rho(x,t) = \left\{ \left( 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_{cr} \Rightarrow V = V_f \right. \quad (2.27)$$

$$\rho(x,t) = \left( 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} \right) \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} = \rho_0 \leq 0.5$$

(2.28)

Choix des paramètres pour le modèle de référence (Tableau 2.1).

Tableau 2.1

Paramètres du modèle LWR de référence		
Vitesse libre $V_f$ [km/h]	Densité $\rho(x,t)/\rho_{max}=\rho_0, [-]$	Distance $L$ , [km]
120	0.4	1
Gain statique $k$ du modèle nominale de simulation	Constante du temps $T$ du modèle nominale de simulation	Retard $\tau$ du modèle nominale de simulation
0.013793	0.00694444	0.000012056311

Les marges de variation des paramètres du modèle (Tableau.2.2)

Tableau.2.2

Les marges de variation des paramètres du modèle										
Densité : $\rho/\rho_{max}=\rho_0[-]$ :	0.1		0.2		0.3		0.4		0.5	
Vitesse : libre $V_f$ [km/h]:	80		100		120		140		150	
Distance : $L$ [km]:	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3

A partir des marges de variation des paramètres du modèle (Tableau.2.2) nous pouvons calculer les ensembles paramétriques de variation des paramètres du modèle macroscopique LWR de flux de trafic (Tableau 2.3)

Tableau.2.3

A partir des résultats obtenus (Tableau.2.3), nous pouvons présenter les domaines de variation de la densité et de la vitesse libre pour le modèle LWR (2.10). De ces domaines nous pouvons en déduire ceux du gain statique et de la constante du temps pour le modèle de simulation (2.30), qui sont présentés sur la Fig.2.7.

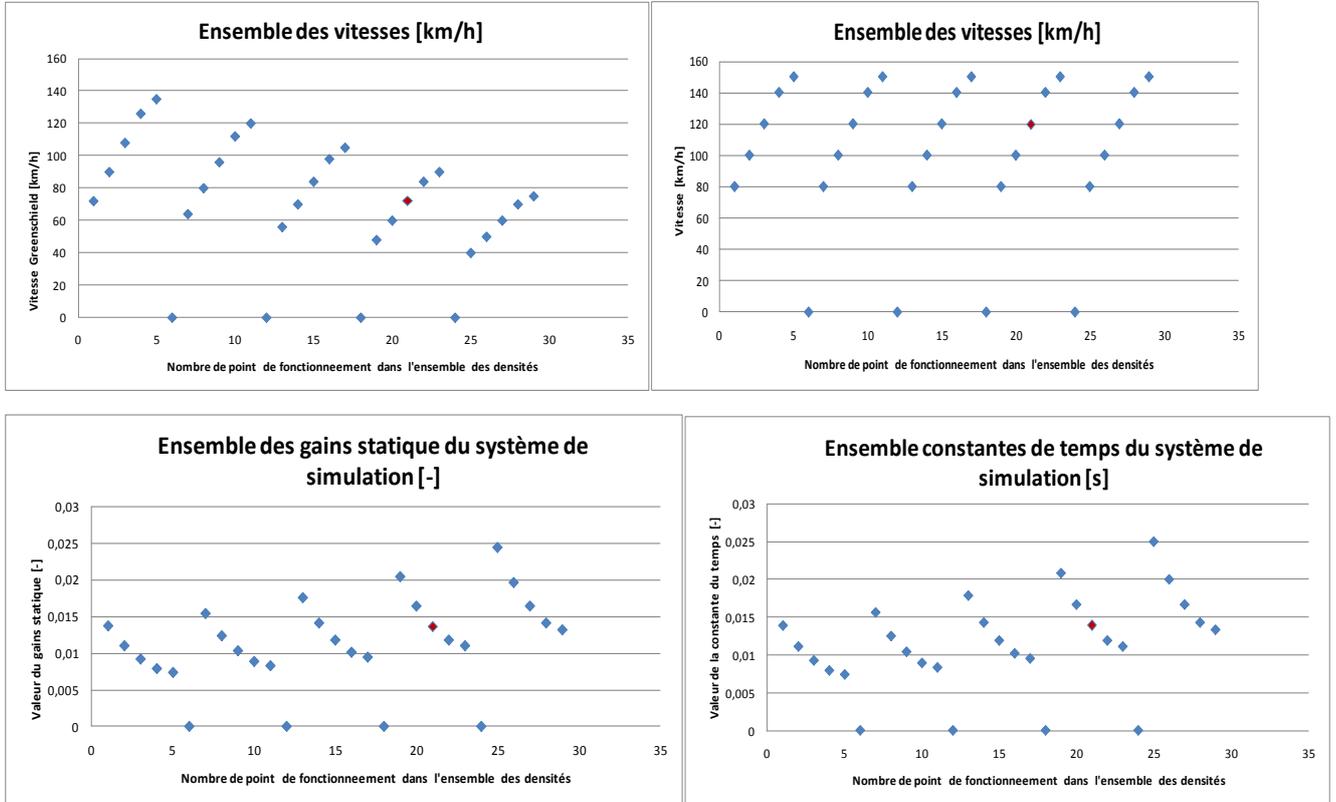


Fig.2.7. Ensembles de variation des paramètres du modèle physique et du modèle de simulation

Pour le modèle de simulation nous utilisons le résultat obtenu par la fonction de Green (2.29) et sa fonction de transfert (2.30) :

$$G(x, x_0, p) = \frac{1}{0.5V_f} (x - x_0) e^{-p \left( \frac{x - x_0 + \frac{\tau}{0.5V_f}}{0.5V_f} \right)} \quad (2.29)$$

$$e^{-p \left( \frac{x - x_0 + \frac{\tau}{0.5V_f}}{0.5V_f} \right)} = e^{-p \left( \frac{x - x_0}{0.5V_f} \right)} e^{-p\tau} = \frac{1}{T_{LWR} p + 1} \frac{1}{\left( \frac{\tau_{LWR}^2 p^2}{2} + \tau p + 1 \right)} \quad (2.30)$$

$$G(x, x_0, p) = W(x, x_0, p) = k_{LWR} \frac{1}{T_{LWR} p + 1} \frac{1}{\left( \frac{\tau_{LWR}^2 p^2}{2} + \tau p + 1 \right)}$$

A partir de (2.30) nous pouvons construire le schéma structurel du modèle (Fig.2.8) pour l'ensemble des modèles de simulation (Tableau.2.3) :

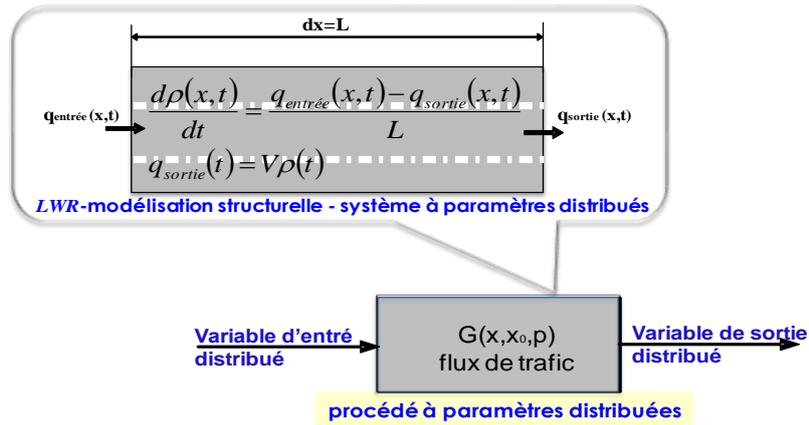


Fig.2. 8. Schéma structurel du modèle LWR du flux de trafic routier

On trouve un modèle dont les paramètres varient autour de sa valeur de référence. Il sera soumis alors à plusieurs perturbations, qui vont influencer les paramètres du modèle (Fig.2.9).

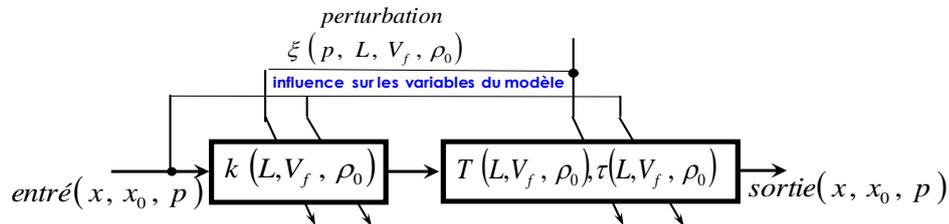


Fig.2.9. Schéma d'influence des variables du modèle par les perturbations

### ***Influence du modèle conforme au système réel (de simulation) à partir de la variation des paramètres du système réel***

Les différents types de perturbations modifient l'état du système autour de son état de référence (d'équilibre) ou, dans un cas stationnaire, d'un état d'équilibre vers un autre point d'équilibre (c'est-à-dire d'un point du D.F vers un autre). Chaque fois que nous avons une variation de la densité, du débit et de la vitesse nous avons une variation des paramètres du système - gain statique, constante de temps et retard, ce qui rend notre système incertain. L'influence de la variation de la vitesse et respectivement de la densité sur les paramètres du modèle de simulation est :

- pour la dépendance de la vitesse calculée par le D.F. de Greenshield (Fig.2.10)

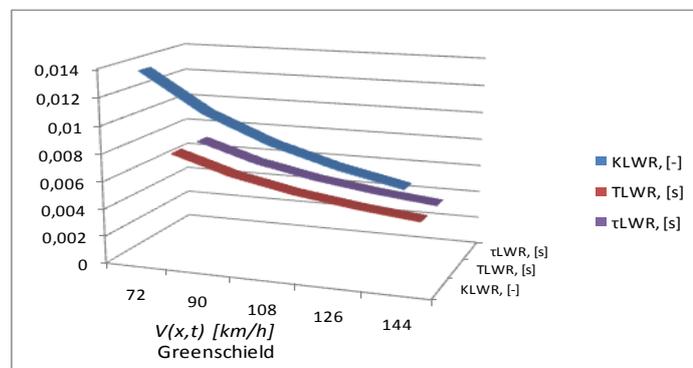


Fig.2.10. Dépendance des paramètres du modèle  $k$ ,  $T$  et  $\tau$  de  $V(x,t)$  pour le D.F. de Greenshield

- pour la dépendance de la vitesse libre et de la densité (Fig.22).

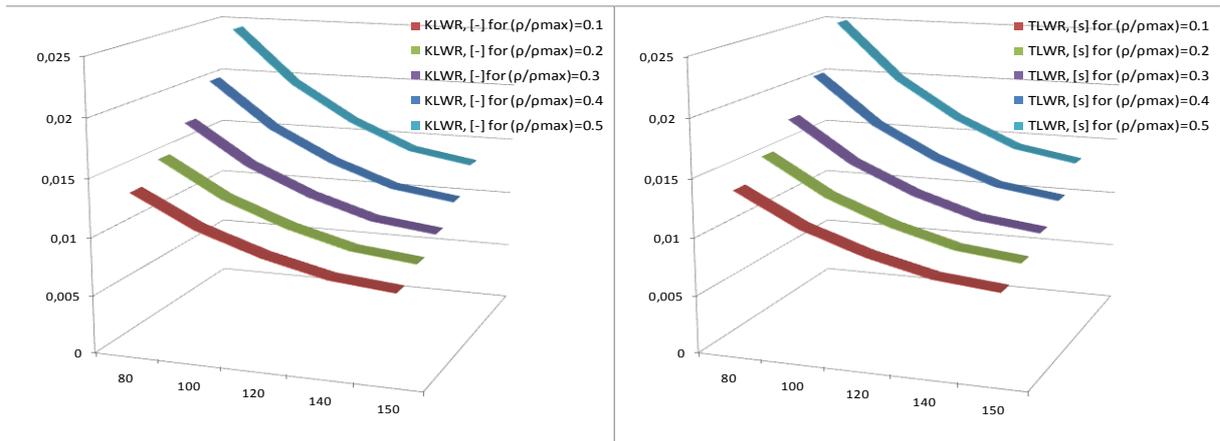


Fig.2.11. Dépendance des paramètres du modèle  $k$  et  $T$  du changement de  $V_f$  et de  $\rho$

A partir des résultats de (Fig.2.10) et (Fig.2.11) nous pouvons conclure que les perturbations non-structurées influencent la valeur du gain statique. Alors que l'augmentation de la vitesse lors de la conduite réduit la valeur du gain statique du modèle de simulation. Quant aux performances du modèle pris en considération, nous pouvons conclure qu'elles diminuent avec l'augmentation des paramètres du modèle de simulation. Ce qui nous amène à une diminution de la vitesse de conduite sur la route et une augmentation du nombre de véhicules sur le tronçon routier. Nous obtenons alors un système dont les performances et les marges de stabilité sont réduites. Ainsi, le système augmente le temps de trajet. Plus on est près de la valeur critique de la densité, plus les paramètres du modèle de simulation sont élevés. Comme conséquence, nous allons avoir une influence sur la stabilité et sur les performances du système obtenu. Cela provoquera une augmentation du temps de parcours du flux de trafic. Alors que pour des densités identiques lorsque la vitesse augmente nous constatons une diminution du gain statique et de la constante de temps. Cela signifie que les véhicules vont sortir plus vite du réseau et que leur temps de passage va diminuer proportionnellement à l'augmentation de la vitesse.

Par la suite, nous allons effectuer une étude temporelle et harmonique du modèle LWR soumis à ces perturbations pour observer les différentes situations routières et les différentes demandes à l'entrée du segment de route étudié. Tous les résultats sont obtenus en considérant que la densité maximale est égale à  $\rho_{\max} = 120$  [véh/km],  $\rho_{cr} = 60$  [véh/km],  $L = 6$  [km]. Nous allons effectuer les études suivantes :

1. Etude temporelle et reconstitution du diagramme fondamentale pour le modèle de référence sans perturbations
2. Etude temporelle et reconstitution du diagramme fondamentale d'un segment simple de 6 km avec perturbations internes (paramétrique) et externe (signal de consigne d'entrée);
3. Etude fréquentielle d'un segment de 6 km avec perturbations internes (paramétrique) et externe (signal de consigne d'entrée);

4. Etude d'un segment composé (de grande longueur) à partir d'un segment simple – segment uniforme de 3 km sans perturbation.

**1. Etude temporelle et reconstitution du diagramme fondamentale pour le modèle de référence sans perturbations**

Pour le modèle de référence nous avons effectué une étude temporelle pour valider la méthode utilisée par reconstruction du diagramme fondamentale. Pour les calculs analytiques nous avons pris le D.F. de Greenshield et dans les différents études effectuées nous avons travaillé qu'avec son parti fluide. Ca nous permettra de valider les démarches analytiques choisies. Cette étude ici va aider à pouvoir comparer les résultats obtenus et à valider les atouts de la méthode, avec ceux proposé par [Papageorgiou (2008)]. Papageorgiou traite le problème de péage routier en indiquant, que pour les processus de redémarrage, lorsqu'on a un modèles en équilibres, on reconstruit que la moitié gauche du diagramme fondamentale. Dans notre cas d'étude il s'agit de redémarrage après les barrières, mais c'est analogue dans le cas des feux rouge. Sur la figure 2.12.a, nous proposons le modèle reconstruit pour un modèle calculé, quand on considère que :  $V_f=120$  [km/h],  $\rho_{max}=120$  [véh/km],  $L=1$  km. Dans le modèle présenté sur la fig.2.12.a, nous avons une contrainte de densité, limitée à 35 % de la densité maximale.

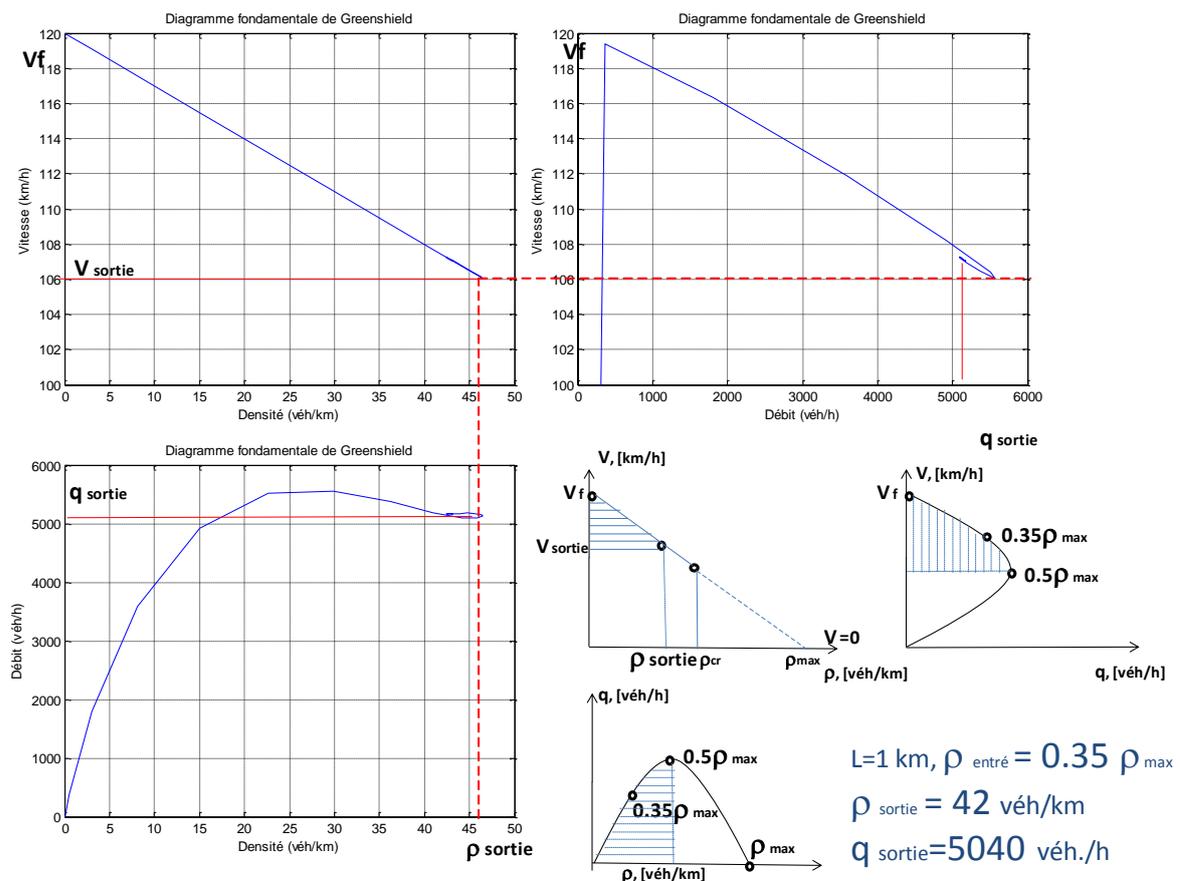


Fig. 2.12.a. Reconstruction du diagramme fondamentale de Greenshield pour le modèle de référence calculé

Dans ce cas là, nous aurons une densité qui ne dépasse pas 42 [véh/km] et un débit qui sera limité à 5040 [véh/h]. La même contrainte va être recherchée dans les travaux du Chapitre 4, concernant la commande sur le même segment lorsqu'on a une forte densité en amont du péage. A partir du modèle de référence réalisé nous obtenons le résultat de la simulation (Fig.2.12.a) qui nous donne le parti fluide du D.F. Sur la figure nous obtenons une augmentation de la densité et lorsqu'on dépasse la densité imposée dans la contrainte, le modèle de simulation tente à revenir à sa valeur de contrainte d'une manière naturelle.

A partir des résultats positifs sur la reconstitution du diagramme fondamentale du modèle de référence nous proposons la reconstitution du D.F. (Fig.2.12.b) de l'ensemble de variation des paramètres du Tableau.2.2.

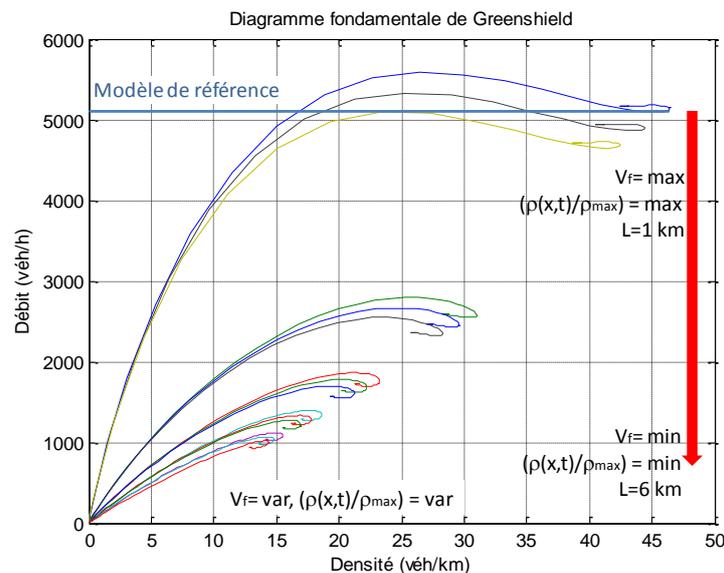


Fig. 2.12.b. Reconstruction du diagramme fondamentale de Greenshield pour l'ensemble des modèles de variation des paramètres

Les différentes gerbes de caractéristiques sont généralement provoquées par la variation des paramètres du modèle, c'est-à-dire par des perturbations paramétriques. Dans la suite, nous allons présenter l'influence des perturbations externes sur le modèle de flux de trafic.

## 2. Etude d'un segment simple uniforme de 3 km sous l'influence des perturbations externes (de consigne) de type demande sur la voie principale de la route

Pour démontrer comment les perturbations externes influencent le comportement du système, nous allons appliquer un signal à l'entrée. Il correspondra à une variation de la demande à l'entrée du segment routier. Nous nous plaçons dans une situation correspondante à une heure de pointe (Fig.2.13).

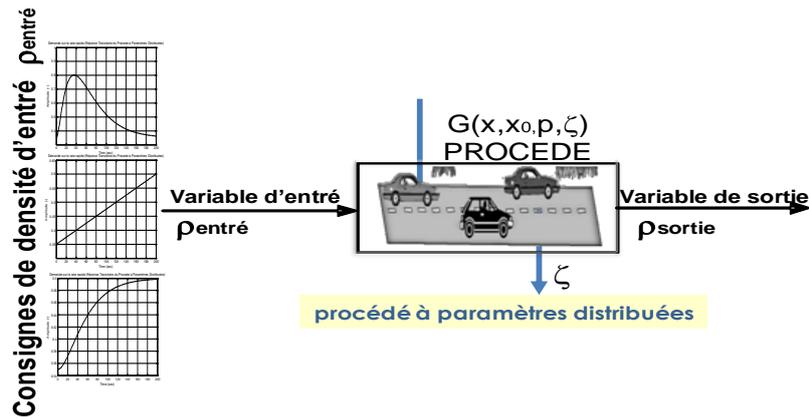
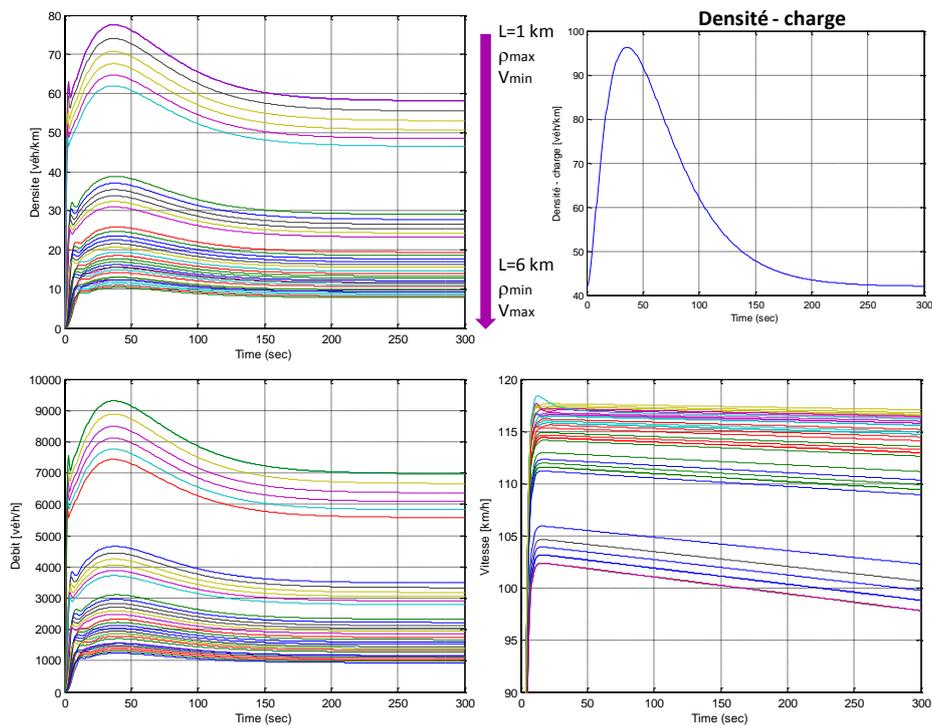


Fig.2.13. Schéma structurelle du procédé avec une perturbation externe de type signal – débit d'entrée sur le segment de la route.

Les résultats de cette étude sont montrés (Fig.2.17.a, b et c) pour l'ensemble des modèles selon les perturbations paramétriques proposées. La consigne correspond à une variation du nombre de véhicules pendant 300 sec. La vitesse libre change dans l'intervalle de  $80 \text{ km/h}$  à  $150 \text{ km/h}$  ( $V_f=120 \text{ [km/h]}$ ) pour le modèle de référence) et les mesures sont effectués en six points de  $x_1=1 \text{ km}$  jusqu'à  $x_6=6 \text{ km}$ . Respectivement pour des valeurs plus petites de la vitesse, dans le cas de la même consigne nous aurons des valeurs plus élevées de la densité de sortie.



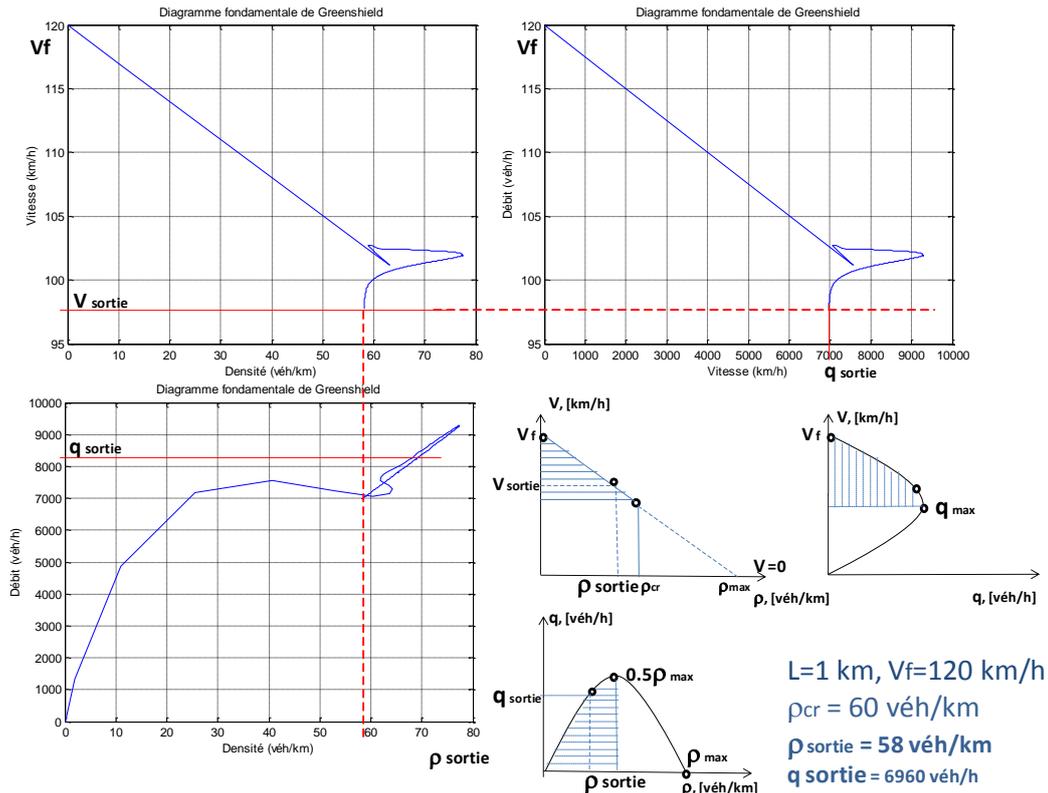
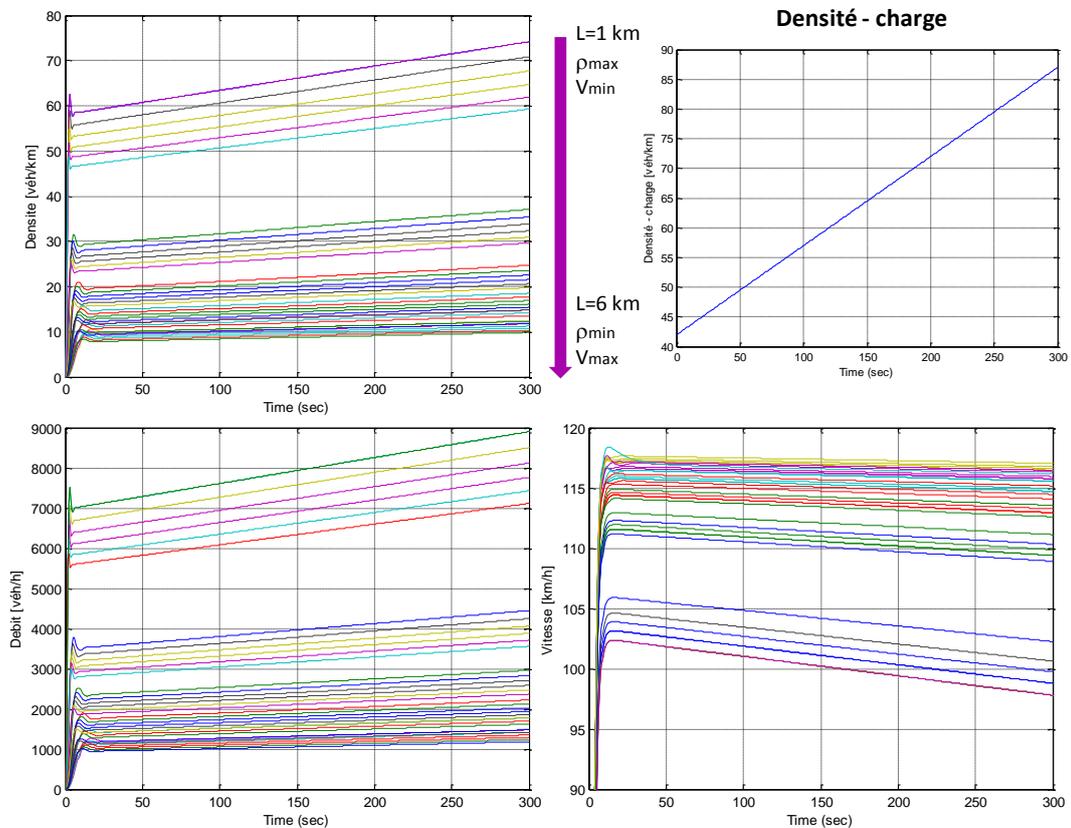


Fig.2.17.a. Etude temporelle et reconstitution du D.F. d'un modèle simple avec variation paramétrique et avec perturbation externe de type signal de charge



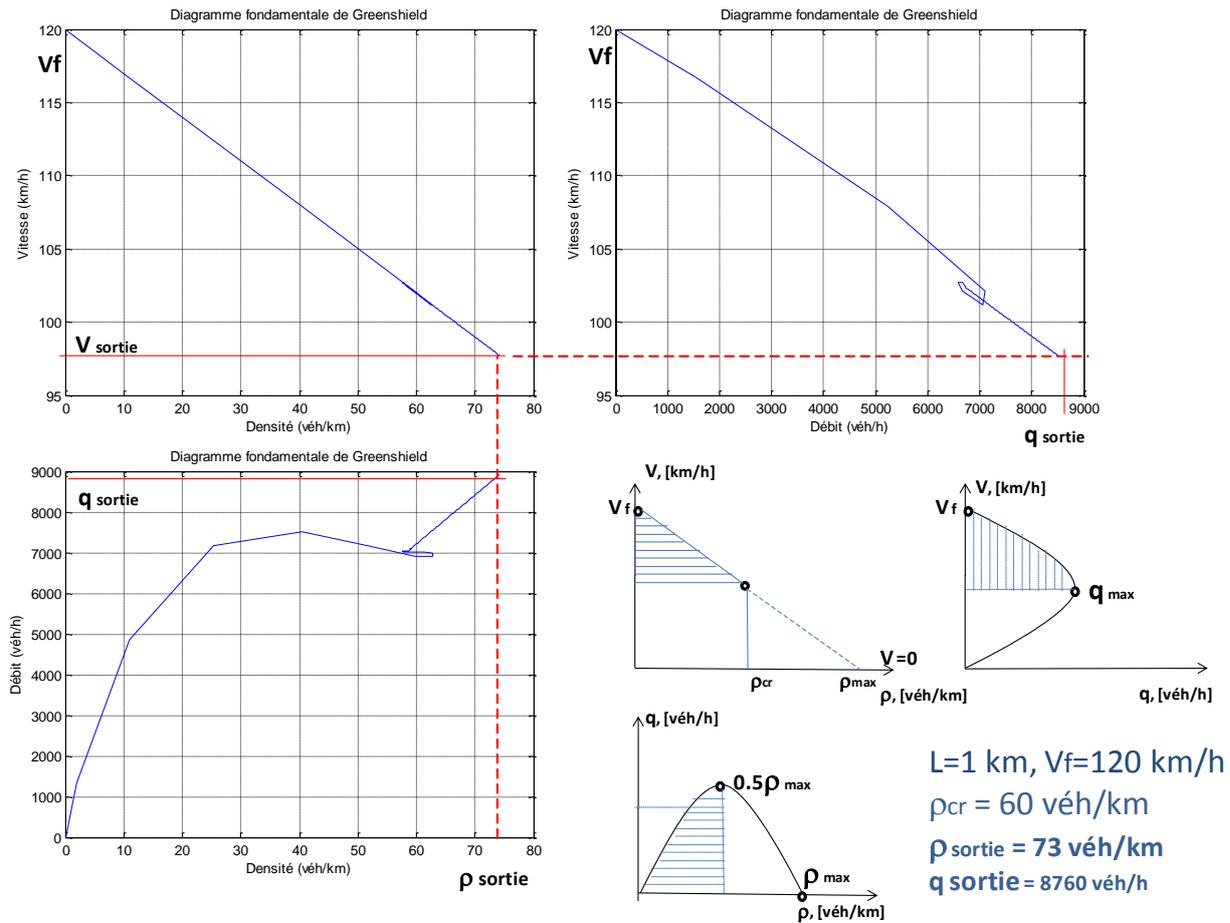
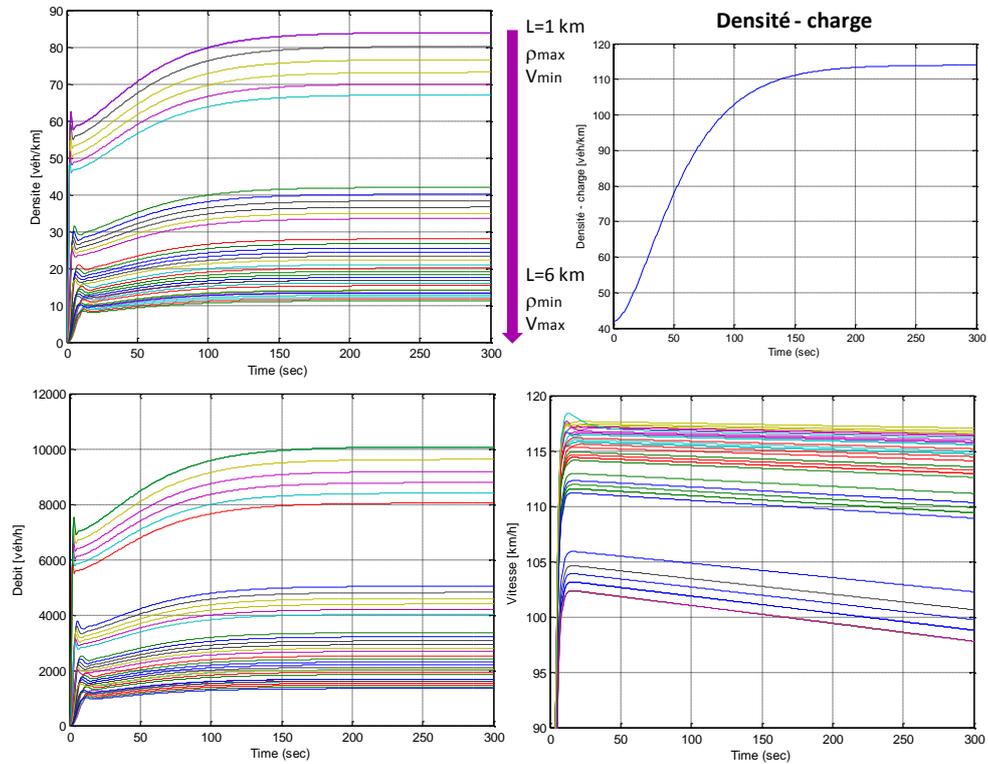


Fig.2.17.b. Etude temporelle et reconstitution du D.F. d'un modèle simple avec variation paramétrique et avec perturbation externe de type signal de charge



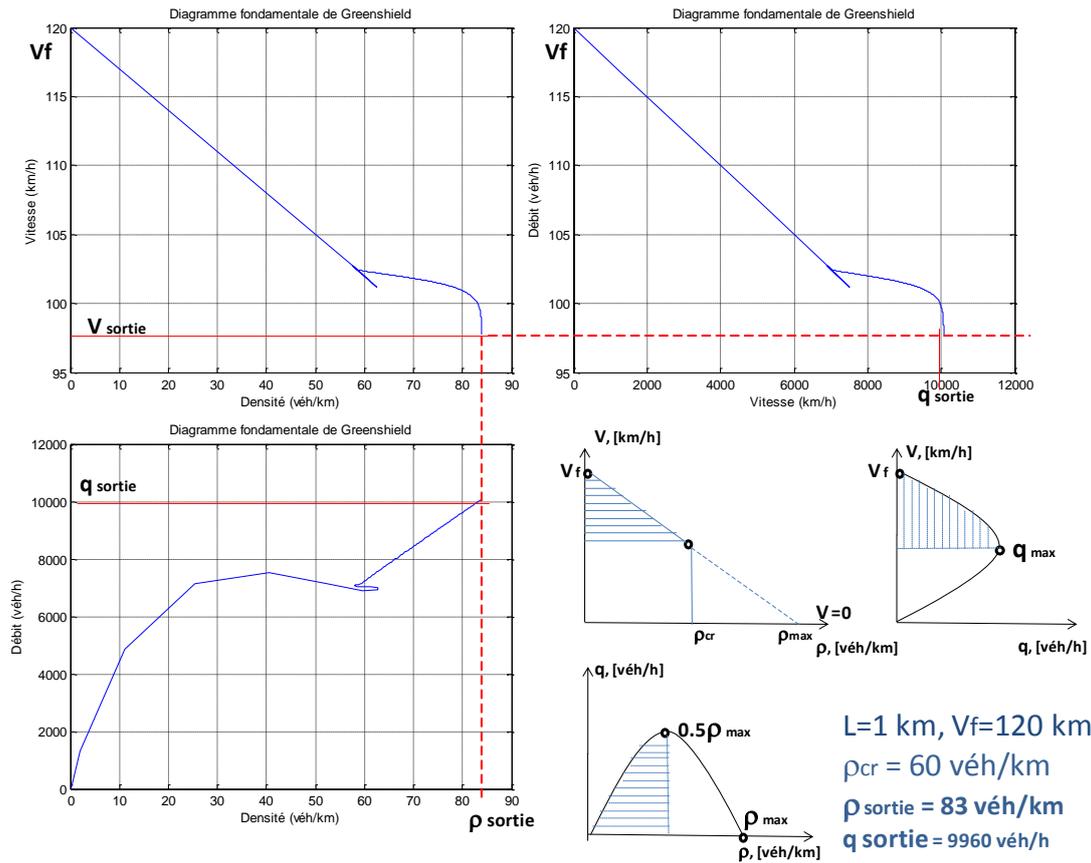


Fig.2.17.c. Etude temporelle et reconstitution du D.F. d'un modèle simple avec variation paramétrique et avec perturbation externe de type signal de charge

### 3. Etude fréquentielle d'un segment de 6 km avec perturbations internes (paramétrique) et externe (signal de consigne d'entrée);

Pour le premier cas d'étude, nous avons fait une analyse harmonique pour les mêmes variations paramétriques. Les résultats sont présentés par le Lieu de Nyquist, Plan de Bode et Diagramme de Black-Nichols (Fig.2.18) et nous donne information sur la stabilité du processus et ses marges de stabilité. Pour le modèle contraint nous avons une stabilité du processus et la valeur de la contrainte assure des vastes valeurs des marges de stabilité.

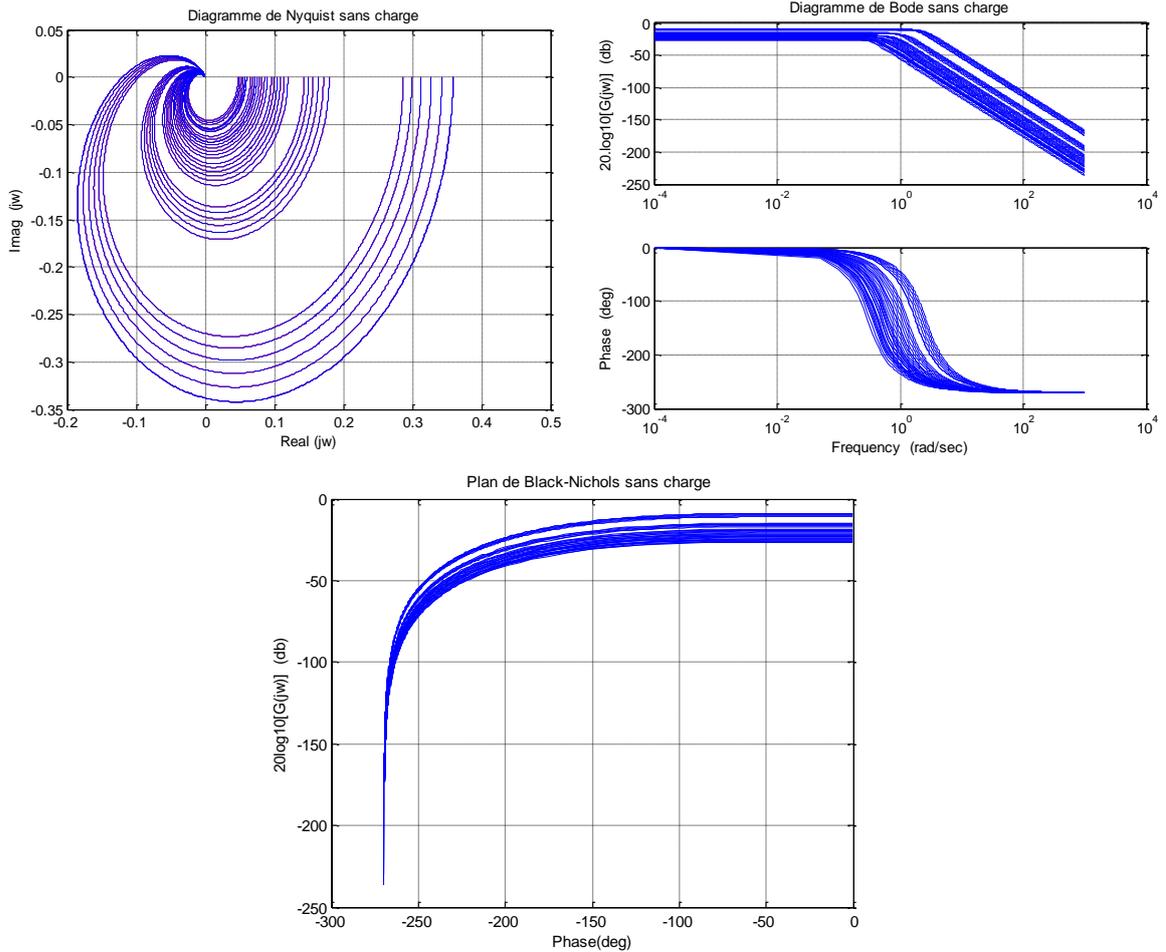
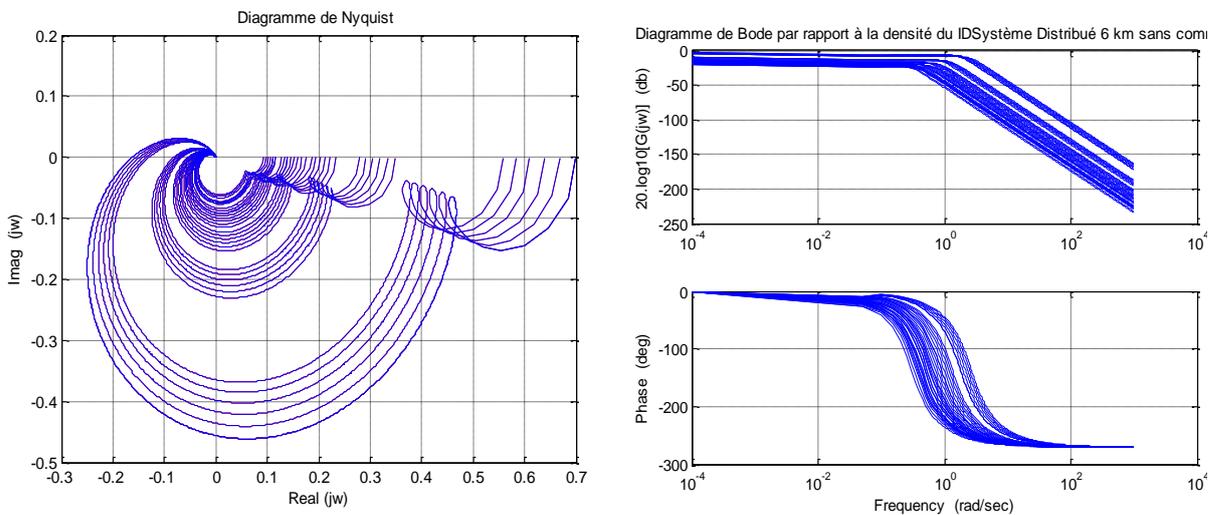


Fig.2.18. Etude harmonique d'un segment simple avec une variation de paramètres et sans charge

La même étude harmonique est répétée pour la deuxième étude quand nous avons la présence des perturbations externe de type charge de la fig.2.17.a. Les résultats de simulations étant donnés par la Fig.2.19.



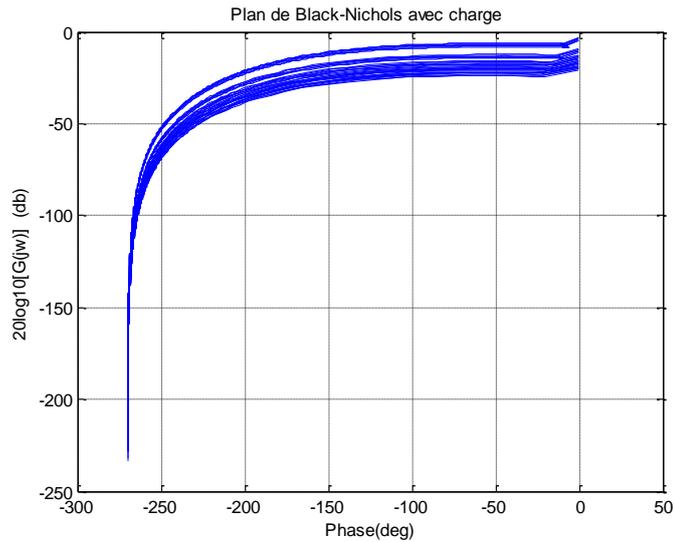


Fig.2.19. Etude harmonique d'un segment simple avec une variation de paramètres et sans charge

A partir des résultats obtenus sur la fig.2.19 nous observons des marges de stabilité réduite. Cependant on peut conclure que dans le cas de force densité le système va perdre sa stabilité et ses marges de stabilité. Tout ces raisonnements conditionnent les démarches de concevoir une commande (Chapitre 4) qui va tenir la densité dans des limites contraintes et va assurer une stabilité et des performances du processus.

#### 4. Etude d'un segment composé (de grande longueur) à partir d'un segment simple – segment uniforme de 3 km sans perturbation (Fig.2.20)

Cette étude à pour but de présenter comment construire un segment de grande longueur à partir d'un segment simple. Dans le cas d'une étude d'un système de flux de trafic de longueur importante, sans varier les conditions sur la route et sa structure, celui-ci peut être représenté à partir d'une succession de segments « simples » (Fig.2.20).

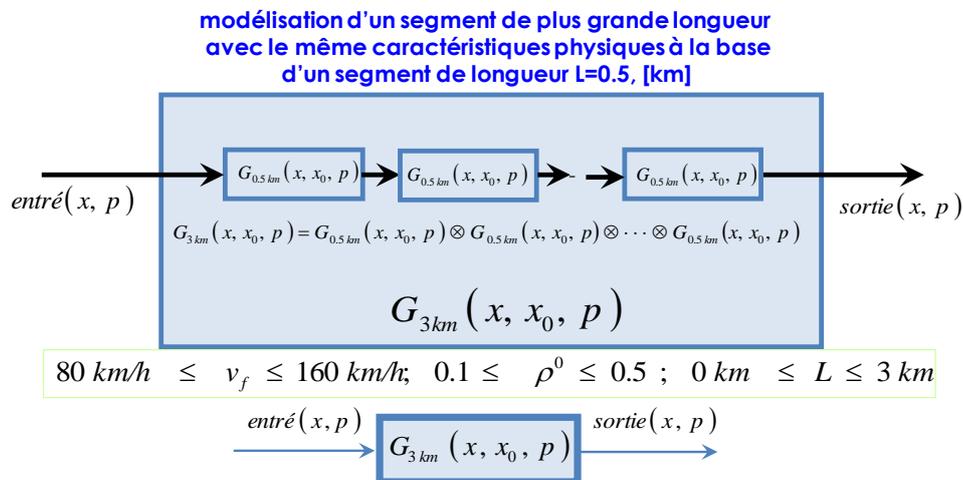


Fig.2.20. Schéma structurel d'un segment constitué à partir de segments simples en série

Nous avons effectué une étude d'un tronçon routier de 3 km dans le cas uniforme sans perturbation. Les résultats des simulations sont présentés sur les figures de (Fig.2.19) à (Fig.2.20). Chaque tronçon simple a une longueur de 0.5 km. Dans le cas où il n'y a pas de perturbation, nous obtenons six caractéristiques, toutes décalées du temps nécessaires aux véhicules pour parcourir un segment simple. Ceci correspond à une situation de référence pour laquelle nous avons les mêmes conditions de circulation dans l'ensemble du tronçon routier de 3 km (Fig.2.19) à (Fig.2.20). Nous obtenons un modèle de simulation dont le gain statique est le même pour chaque segment simple (même densité et vitesse) et d'une constante de temps différente.

Dans le cas d'un tronçon routier de 3 km non-uniforme – les conditions de circulation sont différentes dans chaque segment simple (Fig.2.21):

- d'une rampe d'entrée sur le quatrième tronçon ;
- d'une rampe de sortie sur le quatrième tronçon
- d'une rampe de sortie sur le deuxième tronçon et une rampe d'entrée sur le quatrième tronçon ;

Pour les segments sans rampe, nous prenons les valeurs initiales suivantes :  $V_f = 140$  [km/h],  $\rho^0 = 0.4$  [-]. Pour les segments avec rampes les valeurs changent selon les indications portées sur la fig.2.21.

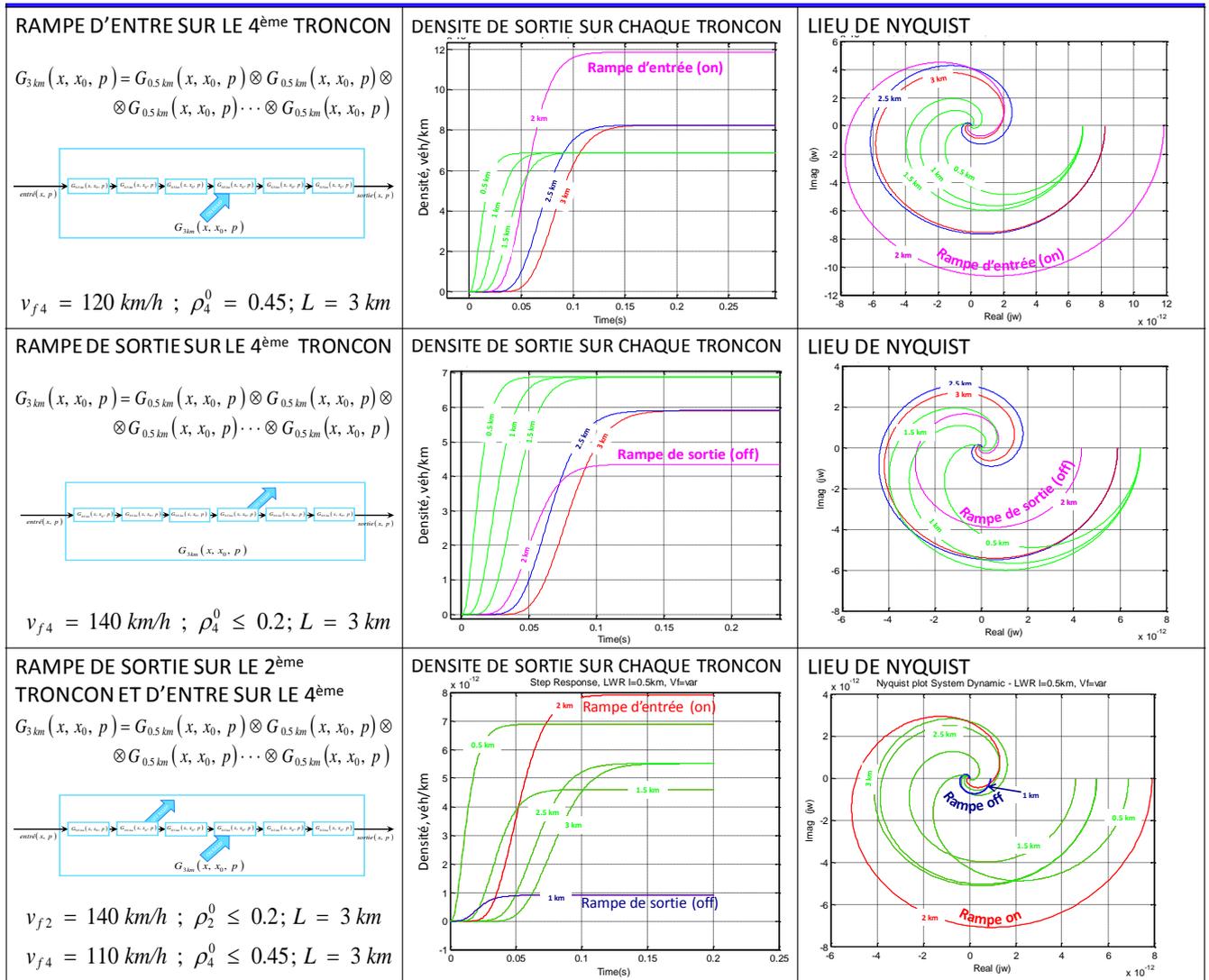


Fig.2.21. Réponse indicielle et lieu de Nyquist d'un segment non-uniforme de 3 km avec une rampe d'entrée et/ou de sortie

Pour le segment avec une rampe d'entrée (modèle perturbé), la valeur de la densité est plus élevée que celle d'un tronçon simple et un gain statique moins élevé que celui d'un tronçon simple. Alors que dans le cas d'une rampe de sortie sur le segment, sa densité est moins élevée que celle d'un tronçon simple (modèle de référence).

Pour conclure sur l'effet qu'apporte une rampe d'entrée et/ou de sortie sur le comportement d'un tronçon routier de 3 km, suite à l'analyse des caractéristiques temporelles et les lieux de Nyquist (Fig.2.21), nous allons avoir, dans le cas d'une rampe d'entrée, une augmentation de densité dans le segment où la rampe est présente et pour le segment situé en aval. A contrario, dans le cas d'une rampe de sortie, nous allons avoir une diminution de la densité dans le tronçon où la rampe est appliquée ainsi que pour les tronçons en aval. Dans le cas de deux rampes, une d'entrée et une de sortie, présents sur différents tronçons d'un même segment, nous observerons une variation de la densité dans les tronçons où les rampes sont présentes (Fig.2.21).

Pour le cas étudié d'un système routier de 6 km avec perturbations, nous avons une influence sur la rapidité et sur le retard dans le système. Les résultats temporels de la densité, nous démontrent, que pour tous changements des paramètres du modèle. Ceci pour n'importe quelle variation des paramètres et quelle que soit la nature des perturbations.

Dans ce chapitre nous avons présenté en premier temps une étude sur stabilité du modèle et une reconstitution de la partie fluide du D.F. La reconstitution du diagramme fondamentale valide les démarches de la méthode de solution analytique et du modèle de simulation obtenu. Dans la suite nous avons présenté un étude de la stabilité et des performances au travers de l'analyse des réponses harmoniques des systèmes, d'une façon directe par les indices de performances du lieu de Nyquist (2D et 3D), des diagrammes de Bode et du plan de Black-Nichols (2D et 3D). On peut conclure que quelle que soit la perturbation interne, nous aurons une influence sur les indices de performances (directes et indirectes) comme suit :

- la rapidité du modèle est plus grande c'est-à-dire que la valeur de la constante de temps et du retard, dans le modèle, sont plus élevés, en diminuant la valeur de la vitesse. En effet, nous pouvons constater que la vitesse se trouve au dénominateur de la fonction du modèle de simulation;
- la valeur finale du gain statique du modèle de simulation diminue avec l'augmentation de la de la densité ;
- pour les mêmes valeurs de la vitesse mais une densité croissante sur la même section de la route nous avons des paramètres du modèle qui diminuent (gain statique, constante de temps et retard). Cela correspond à une diminution de la rapidité du procédé ;

Pour les mêmes valeurs de la densité mais pour une augmentation de la vitesse nous aurons toujours des paramètres qui diminuent dans le temps.

## II.5. Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre un résultat d'application de la fonction de Green comme méthode d'étude d'un système de flux de trafic routier représenté à l'aide du modèle macroscopique LWR. Nous avons obtenu dans un cas stationnaire une fonction retard qui dépend des paramètres du système, notamment la vitesse du flux, mais aussi des hypothèses de validité du modèle, notamment de l'espace. Cette méthode nous a permis d'obtenir une fonction de transfert du processus. Celle-ci a pu ensuite être utilisée pour effectuer une analyse du processus de flux de trafic routier. La comparaison des résultats obtenus avec la méthode de la fonction de Green avec ceux obtenus avec les méthodes numérique montre la cohérence de la démarche. Une analyse temporelle et harmonique est présentée. Elle nous renseigne sur la distribution des flux de véhicules selon les paramètres du modèle. Plusieurs scénarios d'études ont ensuite été proposés, ils nous ont montré l'influence des différentes perturbations. La reconstitution du diagramme fondamentale nous montre que la méthode analytique de résolution et la fonction de transfert obtenue sont cohérent au modèle physique du flux de trafic et surtout

qu'on peut faire des comparaisons avec les modèles obtenu par d'autre méthodes. D'une façon générale, les perturbations entraînent des variations importantes des conditions de circulation, dont les plus fréquentes sont les congestions.

Dans les chapitres suivants nous allons associer différentes stratégies de commande afin de limiter voire d'éviter les congestions en aval des barrières de péage.

# CHAPITRE III: COMMANDE

## Stratégies de commandes des flux de trafic routier

### III.1. Introduction des systèmes de commande

### III.2. Commandes numériques des processus – méthodes de commande simples

#### III.2.1. Retour d'état

#### III.2.2. Contrôle d'accès

##### i. stratégies locales (stratégie Alinea)

##### ii. méthodes de commandes coordonnées

### III.3. Commandes numériques des processus - méthodes de commande intégrée

### III.4. Commande d'un processus présenté par une fonction de transfert dans un système asservi

### III.5. Principe de base de la commande robuste d'ordre non-entier (CRONE)

### III.6. Analyse et conclusions

### III.1. Introduction des systèmes de commande

Dans ce cas de transport routier on se heurte à différents problèmes de résolution causées essentiellement par :

- des événements inattendus, qui jouent un rôle perturbateur du modèle de trafic et qui peuvent générer des congestions pendant un certain temps ;
- un réseau routier complexe compliquant la résolution du modèle.

D'où la nécessité d'introduire des commandes adéquates s'opposant aux difficultés et dont l'objectif sera d'assurer une fluidité du trafic.

Comme le modèle que nous avons obtenu correspond à un segment en aval d'un péage routier, les problèmes rencontrés sont le plus souvent liés à l'augmentation brusque de la densité en aval du péage (provoqué par un accident, une forte demande d'une rampe d'entrée etc.). Il s'agit donc de mettre en place une commande dans le but d'imposer à la densité de rester au-dessous de la valeur critique. Cela conduit également à poser le problème du choix des variables

de commande. La valeur à régler est la densité dans le segment en aval du péage qui est dépendante de la densité de véhicules venant du péage. En autres termes, cela est en lien avec le nombre de cabines ouvertes du péage et le nombre de véhicules qui passent dans une période de temps. Nous avons donc fait le choix d’agir sur la densité en entrée du péage afin de maintenir la densité en aval en dessous de la densité de consigne.

Avant de présenter comment nous avons réalisé cette commande, nous avons choisi de présenter les différentes étapes de conception d’une commande dans le cas général. Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, l’organigramme de principe d’une modélisation d’un processus réel. Nous présentons ci-dessous l’organigramme des différentes étapes d’étude d’une commande d’un processus quelconque (Fig.3.1).

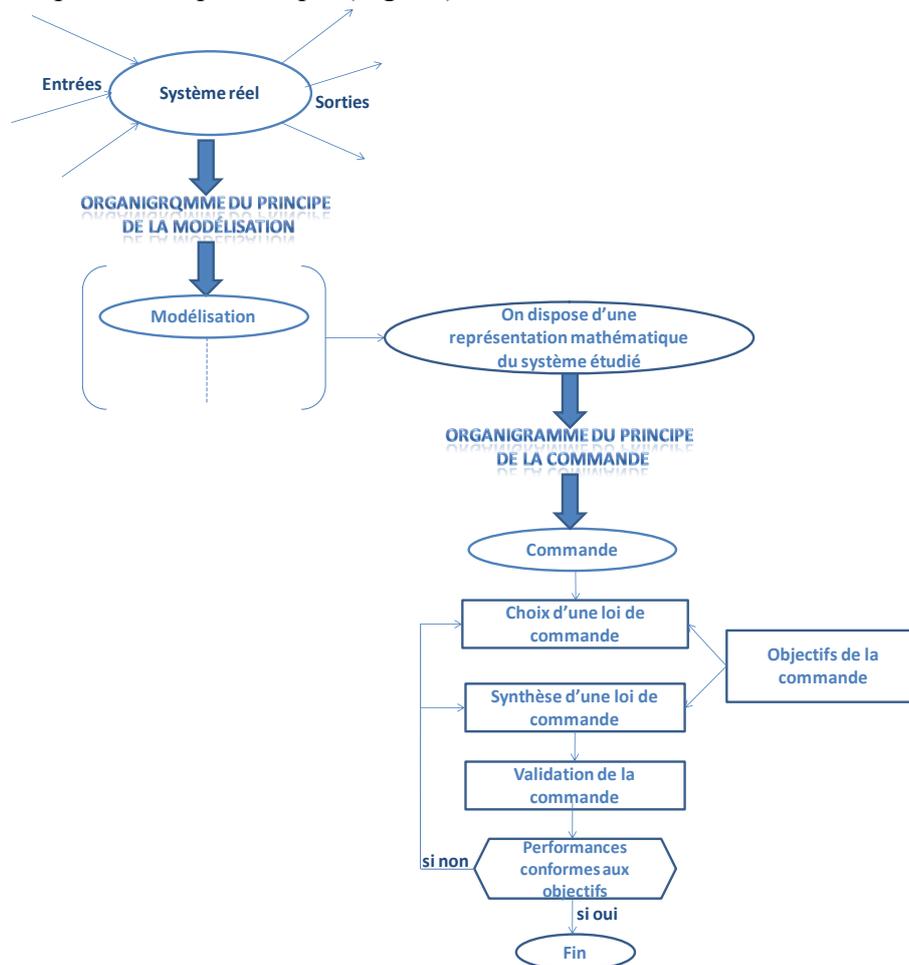


Fig.3.1. Organigramme de différentes étapes d’un projet de commande, suite des étapes du principe de la modélisation d’un processus réel

La mise en œuvre d’une commande peut passer par des méthodes analytiques ou numériques intégrant une ou plusieurs contraintes. Les premières méthodes utilisent des lois de commandes linéaires dont il est possible d’en effectuer la synthèse sur la base de la connaissance de la fonction de transfert du procédé. Les secondes méthodes utilisent des représentations discrètes du modèle du procédé et des lois de commandes. Nous allons présenter ci après l’approche de commande que nous avons testée dans le cas des systèmes de flux de trafic routier.

Notre choix s'est porté sur la mise en œuvre d'une Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE).

### III.2. Commandes numériques– modèles de commande simple :

Il existe plusieurs types de commandes numériques, utilisées pour la correction des systèmes de flux de trafic routier, notamment dans le cas du contrôle des voies rapides. Un rappel des méthodes numériques existantes parmi les plus importantes est présenté ci-dessous.

#### III.2.1. Commande par retour d'état

**Stratégie de commande par «retour d'état»** - on utilise un retour d'état linéaire pour contrôler le flux à l'aide de la fonction d'occupation. L'objectif de cette stratégie de contrôle (3.1) est d'annuler la différence entre la valeur de l'occupation et sa valeur critique.

$$\begin{aligned} r(t) &= -K(o(t) - o_{cr}) + q_{out}(t) - q_{in}(t) \\ r(t) &= K(o_{cr} - o(t)) + q_{out}(t) - q_{in}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho - \rho_{cr}) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

La différence  $(o(t) - o_{cr})$  représente une fonction exponentielle. L'équation de la commande est ajoutée [Kachroo, Krishen 2000] de la façon suivante (3.2) :

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{L} (q_{in}(t) - q_{out}(t) + r(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt} o = \frac{1}{\alpha L} (q_{in}(t) - q_{out}(t) + r(t)) \quad (3.2)$$

La condition (3.1) est satisfaite, elle montre que l'occupation est fonction d'un retard (3.3).

$$o(t) = -k o(t) \rightarrow o(t) = o(0) e^{-kt} \quad (3.3)$$

Les équations (3.1, 3.2 et 3.3) se transforment en (3.4) :

$$r(k) = -K(\rho(k) - \rho_{cr}) \frac{T}{L} + q_{out}(k) - q_{in}(k) \Leftrightarrow r(k) = -K(o(k) - o_{cr}) \frac{T}{\alpha L} + q_{out}(k) - q_{in}(k) \quad (3.4)$$

Le schéma structurel (Fig.3.2) obtenu à partir de (3.1) – (3.4) est représenté ci-dessous :

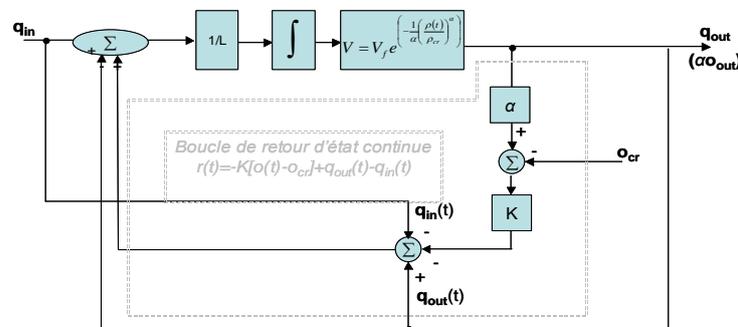


Fig. 3.2. Schéma structurel de la stratégie de commande par retour d'état

## II.2.2. Commande par contrôle d'accès

La méthode de commande simple par contrôle d'accès peut être réalisée à l'aide de différentes techniques de régulation : régulation par aménagement de l'accès, régulation par barrière et régulation par feux. Nous montrons ci-dessous la régulation par feux, divisée en deux grands groupes de stratégie : de régulation locale et de régulation coordonnée (Fig.3.3) :

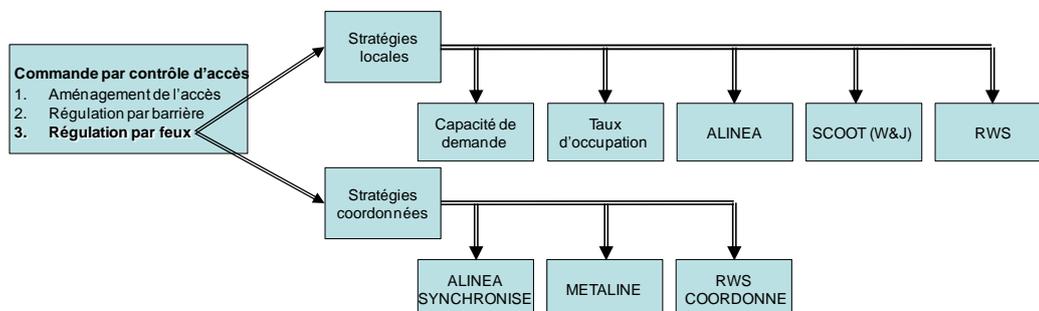


Fig.3.3. Stratégies de commande par contrôle d'accès

Pour chacune de ces commandes, il est important de satisfaire les exigences de:

- *diminution de la capacité sur la rampe d'entrée* – réduction de la demande de la rampe et de sa vitesse ;
- *mise en place des barrières amovibles* – ferment provisoirement l'accès de la rampe;
- *mise en place des feux* – qui vont interrompre périodiquement le flux venant de la rampe. La durée du cycle conditionne la fréquence du nombre de véhicules passants pendant la phase verte. Il faut ajouter la condition du minimum de véhicules entrants sur la voie rapide en limitant le temps de la phase verte.

### i. Stratégies locales de contrôle d'accès – ALINEA :

ALINEA est une commande par contrôle d'accès dont le principe consiste à maintenir le débit de sortie d'une section de route principale à une valeur optimale en mesurant le taux d'occupation en aval d'une rampe d'accès en concordance avec les conditions de circulation ( $o_{cr} - o_{out}(k-1)$ ) et en agissant sur le flux entrant de cette rampe [Papageorgiou (1991)]. Une valeur optimale du débit est définie à partir du D.F. correspondant à la consigne. Le volume de l'occupation est utilisé pour calculer le flux de la rampe d'entrée implémenté dans la période suivant  $r(k)$ . L'expression du flux de la rampe d'entrée est présentée par la relation (3.5) [CERTU (1997)], [Papageorgiou (1991)], [Papageorgiou et al. (2003)], [Papageorgiou et al. (2006)], [Kachroo et al. (1998)]. Cette régulation correspond dans la théorie de l'asservissement et de la régulation à un correcteur de type I (intégrateur) du système en Boucle Fermé (B.F.) [Izermann (1981)] :

$$r(k) = r(k-1) + K_R [o_{cr} - o_{out}(k-1)] \quad (3.5)$$

Il y a deux démarches de contrôles permettant de diminuer les congestions sur la section de route principale. La première démarche consiste en un contrôle du volume de véhicules qui

sont sur le point d'entrer sur cette voie principale. La demande sur la voie principale est maintenue inférieure à la valeur maximale de l'occupation. La deuxième démarche repose sur le contrôle de la vitesse des véhicules situés sur la voie principale en amont de la rampe d'accès. Cette même stratégie décrite sous forme discrète est présentée dans l'annexe 4.

### Stratégie « capacité de la demande »

Il s'agit d'une stratégie de commande d'un système en Boucle Ouverte (B.O.). Une mesure du flux de véhicules est effectuée au niveau de la rampe d'entrée sur la voie principale (3.6) par contrôle de la file d'attente. La contrainte, d'une file d'attente minimale, est ajoutée où  $r_{min}$ , est le flux venant de la rampe dont le but est d'aider à la dispersion de la congestion.

$$u(k) = \begin{cases} r(k) - q_{in}(k-1), & \text{si } o_{out}(k) \leq o_{cr} \\ r_{min}, & \text{si } o_{out}(k) > o_{cr} \end{cases} \quad (3.6)$$

### Stratégie « contrôle de la vitesse »

Elle s'effectue en utilisant des panneaux à messages variables (PMV) informant les véhicules des conditions de circulation en aval. Dans le cas de l'apparition d'une congestion, l'objectif est de limiter la vitesse de circulation des véhicules situés au niveau des PMV afin d'assurer un écoulement plus fluide des véhicules situés en aval et de leur permettre de revenir à un état d'équilibre.

### Stratégie « routage dynamique »

Cette stratégie repose sur un choix de chemin proposé aux véhicules en utilisant des PMV ou une technique GPRS. Les conducteurs sont informés des conditions de circulation en aval de leur position actuelle. Ils peuvent ainsi choisir de suivre un itinéraire plus long ou plus court avec des densités différentes (Fig.3.4).

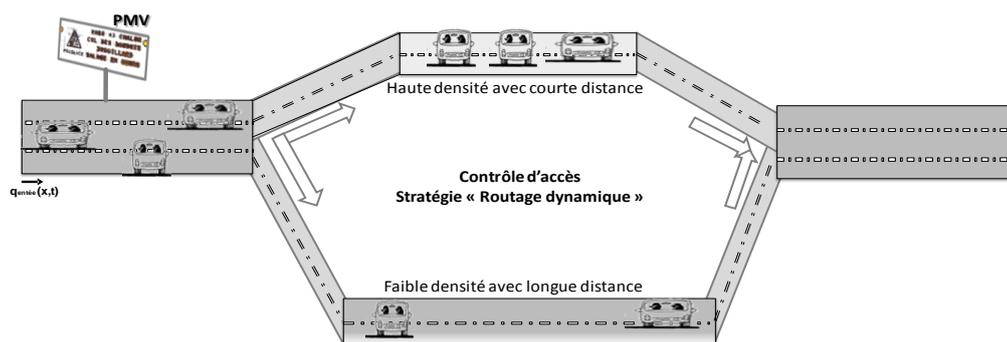


Fig. 3.4. Schéma de principe de la stratégie « routage dynamique » du contrôle d'accès

- ii. **Stratégies coordonnées du contrôle d'accès:** utilisent plusieurs stratégies de contrôle d'accès simple coordonnées

**Stratégie « contrôle prédictif »** [Kotsialos et al. (2001)], [Hegyi (2005)]. Il s'agit d'une approche appliquée pour les modèles macroscopiques du 2<sup>ème</sup> ordre (modèle METANET). Elle est basée sur la construction d'un modèle de réseau sous la forme d'un graphe. Un nœud est créé

dans le modèle du réseau dès qu'il y a un changement dans la géométrie de la route. La voie principale est divisée en tronçons, chacun possédant ses propres caractéristiques (densité, vitesse et flux). METANET fait partie de ce groupe car ce principe de commande utilise le contrôle de la vitesse en amont et le contrôle de la densité en aval. Pour un segment (Fig.3.5) les équations des nœuds sont donnés par les équations (3.7) et (3.8) :

$$q_n(k) = \sum_{\mu \in I_n} q_{\mu, N_{\mu}}(k) \quad (3.7)$$

$$q_{m,o}(k) = \beta_{n,m}(k) q_n(k) \quad (3.8)$$

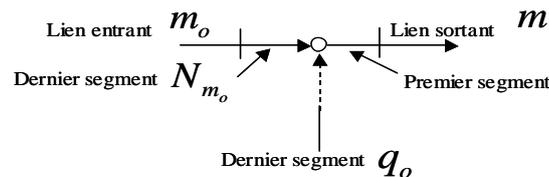


Fig.3.5. Le nœud comme un élément de la structure de l'autoroute

où  $q_n(k)$  est le flux total qui entre dans le nœud  $n$  pendant la période  $k$  ;  $I_n$  est l'ensemble des liens du nœud  $n$  ;  $\beta_{n,m}(k)$  est la fraction du flux total traversant le nœud  $n$  qui passe par le lien  $m$  ;  $q_m$  est le flux qui sort du nœud  $n$  vers les liens  $m$  ; le lien  $m$  est l'un des liens sortant de  $n$  (Annexe 4).

**Stratégie METALINE** – c'est une généralisation de la stratégie ALINEA. Elle repose sur le contrôle d'une section de route par le calcul simultané des débits sur tous les accès en fonction du taux d'occupation mesuré en tout points de l'espace. Le résultat est une optimisation du temps de passage des véhicules sur la voie principale et sur les rampes.

### II.3. Commandes numériques des processus du flux de trafic – modèles de commande intégrée

Il s'agit d'une combinaison entre deux ou plusieurs types de commandes simples qui peuvent intégrer plusieurs contraintes. La réalisation est plus difficile mais elle est plus efficace :

- Commande par rampe et par limitation de la vitesse ;
- Commande par rampe et par guidage automatique ;
- Commande par rampe et par commande du débit sur la voie principale.

Les commandes numériques mentionnées ci-dessus sont toutes des commandes par rampe d'accès. Elles ont montré leurs performances dans le domaine du transport. Cependant ces dernières années, dans le cadre de la régulation des processus non-linéaires d'autres approches ont été développées basé sur l'algèbre différentielle qui prend en considération les propriétés dynamique du processus lors de l'élaboration de la commande. L'algèbre différentielle est basée sur la théorie de la platitude (Annexe 4). La commande conduit à suivre une trajectoire (de la vitesse ou de la densité) en dépendance de la variable de commande [Fliess M. et al. (1992)], [Fliess M. et al. (1995)], [Abouaissa H. et al. (2006)].

## **II.4. Commande des processus distribués en utilisant les méthodes analytiques**

Dans cette approche de commande basée sur une représentation du système de flux de trafic sous forme de fonction de transfert, la synthèse du correcteur revient à déterminer ses paramètres. Les paramètres de ce correcteur dépendent du procédé. Le flux provenant d'une rampe joue le rôle d'une perturbation qui tend à augmenter la densité de véhicules en aval. Un système de flux de trafic est un procédé soumis à différentes perturbations qui peuvent conduire à des situations de circulation congestionnées. Il s'agit donc d'assurer non seulement une stabilité du processus, mais aussi de permettre au système d'atteindre des performances suffisamment robustes. Différentes approches de commande robuste existent, nous pouvons citer : la commande à modèle interne, la commande prédictive, la commande optimale, la commande d'ordre non-entier etc. Pour le type de système, objet de notre étude, il est nécessaire de mettre en place une commande robuste aux variations des paramètres du processus, car les commandes classiques (de type PID) ne permettent pas d'obtenir des performances suffisantes pour l'ensemble du champ de variation des paramètres (Chapitre.II). Afin de mieux saisir la nécessité de mettre en place une commande robuste dans ce domaine d'application, il est nécessaire de rappeler quelques définitions et de présenter la nature distribuée des systèmes de flux de trafic.

Dans l'étude des systèmes distribués on se heurte souvent à plusieurs difficultés de résolution, d'analyse et d'étude de la stabilité, car ils possèdent plusieurs points d'équilibre. Les systèmes de flux de trafic ont la caractéristique de présenter un changement non interrompu des paramètres du modèle - densité, vitesse, débit et position dans l'espace. Il y a un déplacement continu du point de fonctionnement lorsque les paramètres changent sous l'influence de phénomènes externe et interne. De plus la modélisation de ces systèmes restant très approchée cela entraîne une grande incertitude sur leur état réel. Le principe d'incertitude s'exprime par la méconnaissance des paramètres (débit, densité et vitesse) qui s'apparentent à des perturbations (Fig.3.6) [Nikolov E. (2003)].

L'influence qu'ont ces perturbations sur les systèmes étudiés et leurs points d'apparition sont présentés respectivement sur la (Fig.3.6) et (Fig.3.7) :

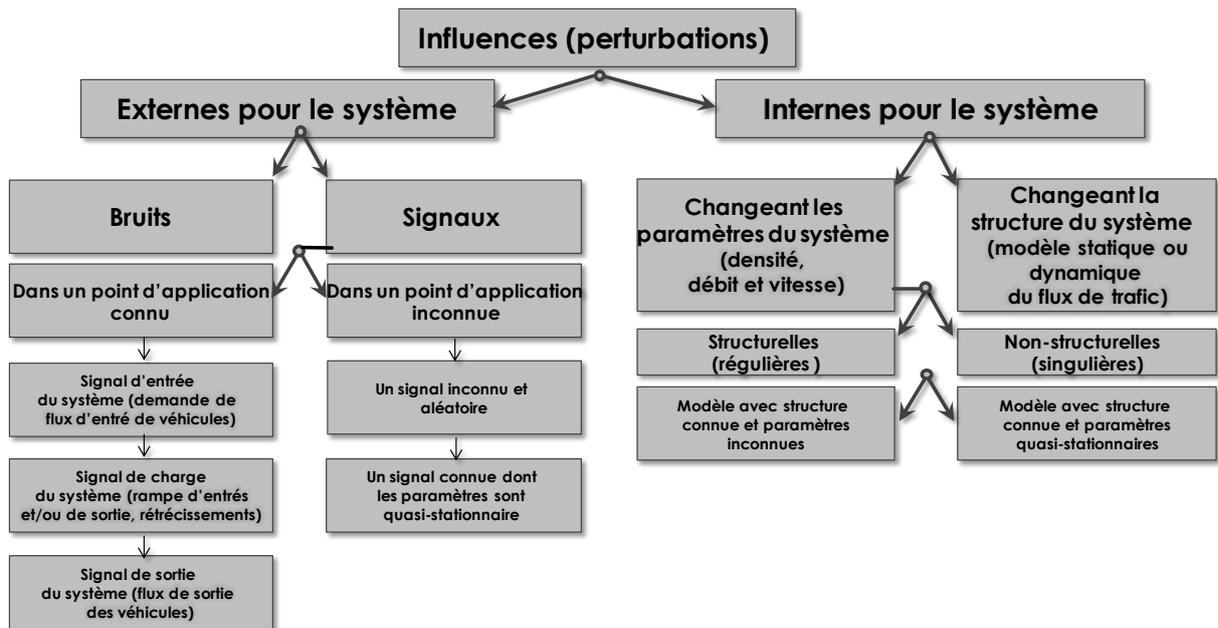


Fig.3.6. Schéma de l'origine des incertitudes présentes dans le modèle (due à la variation des paramètres)

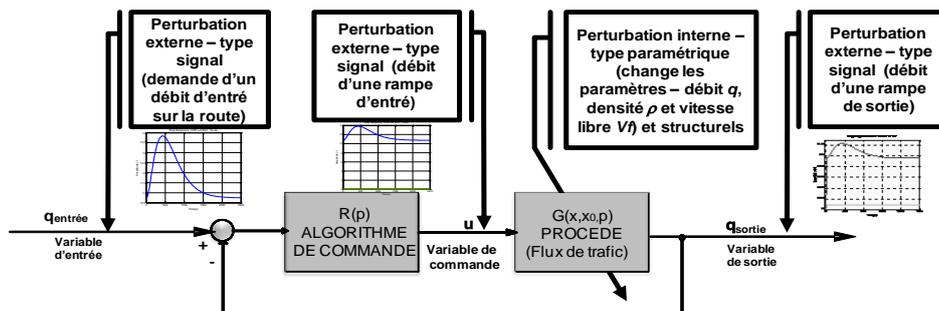


Fig.3.7. Points d'application des perturbations dans le schéma structurel d'un système de commande

L'influence des perturbations dans le système provoque une incertitude dans le modèle du procédé. Elle est toujours observée dans un domaine de variation des paramètres limité selon les propriétés physiques du système routier selon :

- la limite de vitesse ;
- la densité critique ;
- la densité maximale ;
- l'offre et la demande ;
- la longueur du tronçon routier étudié etc.

Pour le système routier étudié, nous pouvons avoir plusieurs ensembles (domaines) de variation, définis par des contraintes associées aux modèles macroscopiques comme :

- la limitation de vitesse entre deux bornes inférieure et supérieure pour les voies rapides (entre 60 km/h et 130 km/h) ;

- la densité des véhicules qui peut varier entre zéro et une valeur maximale (d'un segment vide jusqu'à son occupation maximale) ;
- le débit qui suit une demande prédéfinie selon les heures de pointes journalières, hebdomadaires, annuelles, saisonnières etc.

### i. Stratégie des systèmes de commande robuste

L'objectif de base pour concevoir un système robuste dans le cas des flux de trafic routier est d'assurer un comportement idéal pour le système évitant les congestions tout en minimisant les incertitudes. Le système doit donc avoir des propriétés robuste pour :

- éviter le changement des paramètres, en appliquant une stratégie de commande avec compensation paramétrique ;
- négliger et s'opposer aux perturbations et bruits, en appliquant des stratégies de commande robuste d'ordre non-entier.

Il y a différentes stratégies de contre réaction aux perturbations (Fig.3.8) qui nécessitent d'orienter le problème de synthèse vers celui d'une commande robuste qui doit s'opposer à toute incertitude dans le modèle.

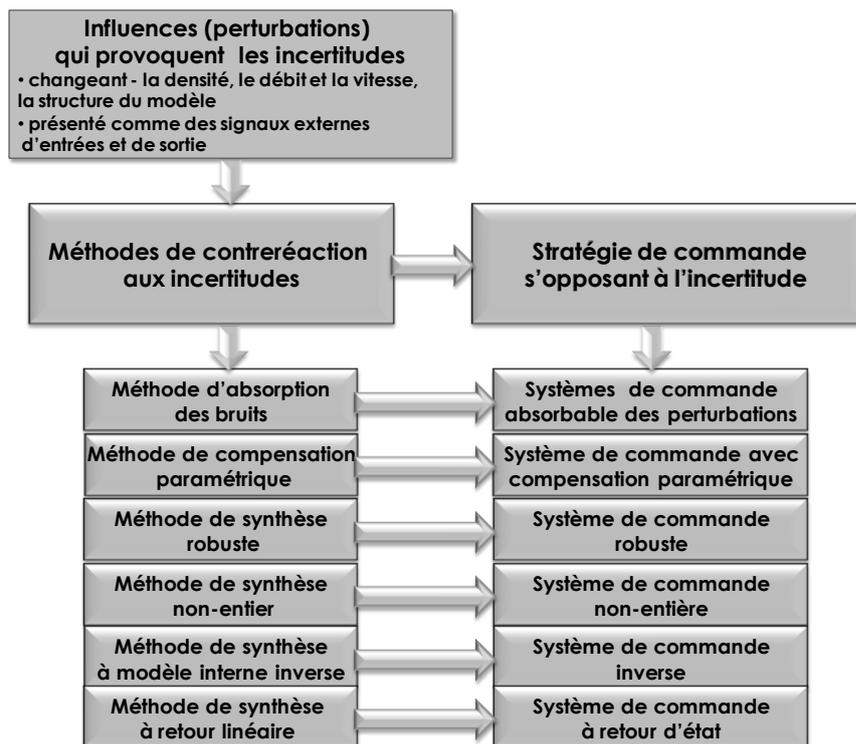


Fig.3.8. Stratégies de rejet des perturbations

### ii. Incertitude

Dans le domaine de l'automatique on cherche toujours à avoir des modèles avec la plus grande exactitude. Cependant, cette connaissance exacte n'est en général pas vérifiée ce qui engendre des incertitudes de modélisation. Il faut donc assurer une certaine robustesse au modèle, c'est-à-dire garantir les propriétés désirées pour toute la famille de systèmes autour du

modèle de référence (nominal). Dans sa nature chaque signal, bruit, charge ou consigne sont ceux qui influencent le processus [Nikolov E. (2005)], [Labit Y. (2007)]. Le type des perturbations, leurs points de fonctionnement et surtout le type d'incertitudes provoqués sont présentés sur la figure (Fig.3.9). On distingue deux grands groupes de perturbations pour le modèle – externes (structurées) et internes (non-structurées).

Les deux groupes d'incertitudes sont divisées comme suit:

- Incertitudes provoqué par des signaux – structurées – bruit aléatoire ou signal d'onde (signal dont la forme est connue a priori) (Fig.3.9)

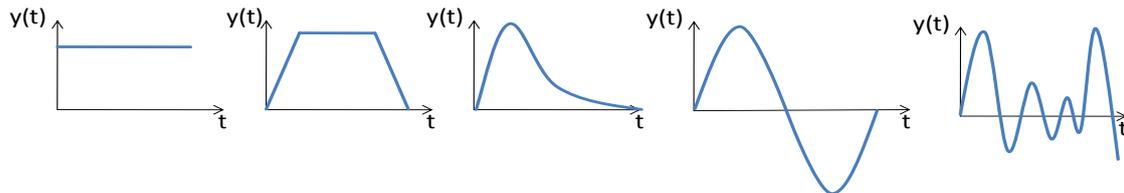


Fig.3.9. Bruit aléatoire ou signaux d'ondes qui provoquent l'incertitude dans le modèle du procédé du système

- Incertitudes provoquées par des paramètres ou constantes (non-structurées) – elles sont de type : additives, séries ou multiplicatives (directes ou inverses) en entrée ou en sortie du modèle nominal du procédé (Tableau.3.1)

Tableau.3.1

Perturbations paramétriques additives	Perturbations paramétriques en série	Perturbations paramétriques multiplicatives directes	Perturbations paramétriques multiplicatives inverses
$L_a = G - G^*$	$L_s = \frac{G - G^*}{G^*}$	$L_m = \frac{G - G^*}{G^*}$	$L_m = \frac{G - G^*}{G^*}$

Les différents types de perturbations qui influencent les systèmes sont montrés graphiquement par le lieu de Nyquist (Fig.3.10) avec son ensemble de modèles linéaires (système multi modèles). Chaque circonférence de la figure (Fig.3.10), présente l'ensemble de points que le système de référence peut avoir lors de la variation des paramètres pour une valeur de la fréquence. Dans chaque circonférence il y a un ensemble d'états du système de référence et des systèmes perturbés (Fig.3.10).

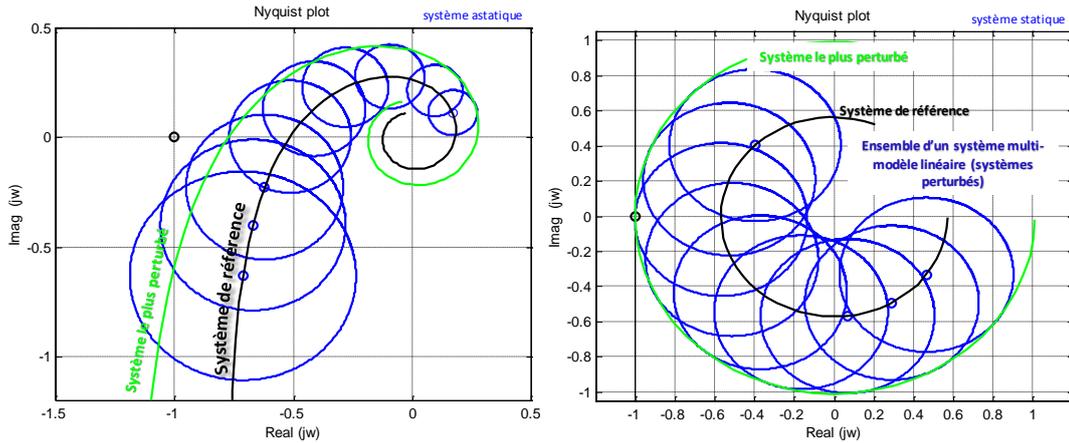


Fig3.10. Analyse de stabilité robuste dans le plan de Nyquist d'un système de commande présentée sous forme d'un système multi-modèle linéaire (statique ou astatique) avec son modèle de référence et ses modèles perturbés

### iii. Critères, stabilité et performances robustes des systèmes

Le critère de base dans un système de commande robuste est de garantir les performances souhaitées dans le cas des systèmes incertains (perturbés). Ici il faut chercher à étudier non seulement les performances classiques (stabilité, précision, rapidité etc.) avec leurs indices obtenus à partir des systèmes de commandes classiques (stabilité, coefficient d'amortissement, dépassement, temps de montée, marge de gain et marge de phase etc.) mais également les performances robustes des systèmes perturbés (3.4), [Nikolov E. (2003)] - stabilité robuste et performances robustes (Fig.3.10). Ces deux dernières, représentées par deux fonctions supplémentaires : de sensibilité, qui nous donne la réponse du système en boucle fermée (3.10.a) et de sensibilité complémentaire, qui correspond à la fonction de l'erreur (3.10.b). Les propriétés robustes sont importantes dans le cas d'une incertitude du modèle du procédé. Elles sont définies pour un ensemble (domaine)  $\Pi$  de variation des paramètres (3.9) avec son modèle nominal  $G^*(j\omega)$ , ses modèles perturbés  $G(j\omega)$  (incertains) et un modèle qui va être le plus perturbé  $G^{\square}(j\omega)$  pour lequel les paramètres du modèle (débit, densité, vitesse, longueur de la route) vont varier le plus (Chapitre.II). La différence entre les paramètres du modèle nominal et du modèle perturbé forme l'ensemble des fonctions de perturbation additives  $L_a(j\omega)$  (3.11.a) et multiplicatives (ou en série)  $L_m(j\omega)$  (3.11.b) [Nikolov E. (2005)]. Cela équivaut à définir un système multi-modèle. Une étude fréquentielle du système en boucle fermée a été réalisée dans laquelle les deux fonctions (3.10.a) et 3.10.b) définissent les propriétés et les performances robuste du système sous les conditions (3.11.a) et (3.11.b) satisfaites par le signal d'entrée du système, le retour d'état et l'erreur. Les conditions de robustesse d'un système de commande sont alors données par les relations (3.9) – (3.14.b).

$$\prod = \begin{cases} \left| \frac{G(j\omega) - G^*(j\omega)}{G^*(j\omega)} \right| \leq \overline{L}_m(j\omega) \\ \|\eta \overline{L}_m\|_\infty = \sup |\eta \overline{L}_m| < 1 \Rightarrow \overline{L}_m < \frac{1}{\eta}, \forall \omega \\ \|e v\|_\infty = \sup |e v| < 1 \Rightarrow |\eta \overline{L}_m| + |e v| < 1, \forall \omega \end{cases} \quad (3.9)$$

Graphiquement la performance et la stabilité robuste sont présentées en général dans les plans de Nyquist (Fig.3.11) et de Black-Nichols.

$$\eta(j\omega) = \frac{R(j\omega)G(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} = 1 - e(j\omega) \quad (3.10.a)$$

$$e(j\omega) = \frac{1}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} = 1 - \eta(j\omega) \quad (3.10.b)$$

$$L_a(j\omega) = G(j\omega) - G^*(j\omega) = \Delta G(j\omega) \quad (3.11.a)$$

$$L_m(j\omega) = \frac{G(j\omega) - G^*(j\omega)}{G^*(j\omega)} = \Delta G(j\omega) \quad (3.11.b)$$

Nous pouvons présenter le système nominal en boucle ouverte par  $W^*(j\omega)$ , le système le plus perturbé par  $W^\bullet(j\omega)$  et les autres modèles perturbés par  $W(j\omega)$  de l'ensemble de variation des paramètres du modèle du système (3.12) :

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= R(j\omega)G(j\omega) \\ W^*(j\omega) &= R(j\omega)G^*(j\omega) \\ W^\bullet(j\omega) &= R(j\omega)G^\bullet(j\omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

La condition de stabilité robuste pour un système incertain impose que pour chaque fréquence des réponses harmoniques du système nominal en boucle ouverte et tous les ensembles de systèmes perturbés ne doivent pas entourer le point de Nyquist (-1, j0). A partir de cette remarque nous pouvons construire un ensemble de variation des paramètres pour chaque fréquence, le plus souvent représenté par une circonférence, en prenant en compte le système nominal (le centre de la circonférence) et le système le plus perturbé (sur l'extrémité). L'écart constaté donne le rayon de la circonférence. Cet écart donne également la valeur et la nature de la perturbation.

Dans le cas de notre étude nous allons utiliser un modèle de perturbation additive pour l'analyse robuste du système. Il faut donc établir le modèle le plus perturbé qui nous servira de référence pour la synthèse robuste qui s'en suivra. Pour toutes variations des paramètres du système si le modèle le plus perturbé satisfait les conditions (Fig.3.10) et (Fig.3.11), cela

permettra d'affirmer que pour n'importe quelle perturbation tous les modèles de cet ensemble satisfèront aux conditions imposées pour chaque valeur de la fréquence  $\omega \in [0, \infty)$ .

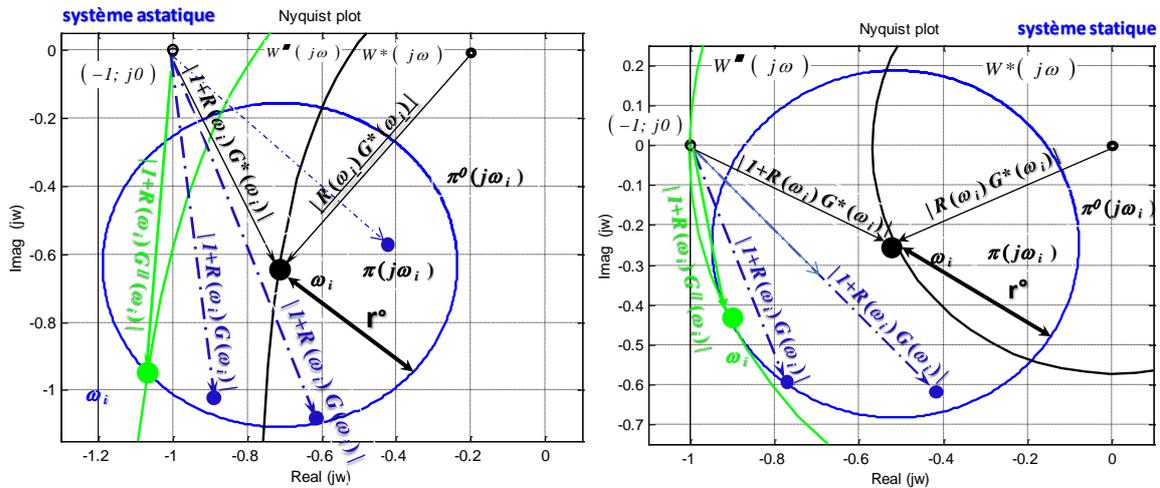


Fig.3.11 Critères de stabilité et performance robuste pour un système statique et astatique

La synthèse robuste apparaît comme une succession de circonférence (3.13.b) et (3.13.a). Les conditions de stabilité robuste (3.14.b) et de performance robuste (3.14.a) des systèmes en boucle ouvert et fermé s'expriment donc de la façon suivante :

$$r(\omega) = |L_a(\omega)R(\omega)| = |L_m(\omega)R(\omega)G^*(\omega)| \quad (3.13.a)$$

$$\pi(j\omega) = \begin{cases} \text{Re}^*(\omega) + r(\omega)\cos\Omega, \\ \text{Im}^*(\omega) + r(\omega)\sin\Omega, \end{cases} \quad \Omega \in [0, \infty) \quad (3.13.b)$$

$$\begin{cases} \frac{R(\omega)G^*(\omega)}{1+R(\omega)G^*(\omega)} = \eta^*(\omega), \quad \left| \frac{R(\omega)G^*(\omega)}{1+R(\omega)G^*(\omega)} \right| \overline{L_m(\omega)} = |\eta^*(\omega)\overline{L_m(\omega)}| < 1, \\ \frac{1}{|\eta^*(\omega)|} > \overline{L_m(\omega)}, \quad \forall \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Exigence de performance robuste du système en B.O. :} \\ |1+R(\omega)G(\omega)| \geq |1+R(\omega)G^*(\omega)| - r(\omega) \quad \forall G \in \prod, \quad \forall \omega \\ \text{Exigence de performance robuste du système en B.F. :} \\ |\eta^*(\omega)\overline{L_m(\omega)}| + |e^*(\omega)v(\omega)| < 1 \end{cases} \quad (3.14.a)$$

$$\begin{cases} r^0(\omega) = |L_m(\omega)R(\omega)G^*(\omega)| \\ \text{exigence de stabilité robuste en B.O. :} \\ |1+R(\omega)G^*(\omega)| > r(\omega), \quad \forall \omega \\ |1+R(\omega)G^*(\omega)| > \overline{L_m(\omega)}R(\omega)G^*(\omega) \\ \text{exigence de stabilité robuste en B.F. :} \\ |\overline{L_m(\omega)}\eta^*(\omega)| < 1, \quad \forall \omega \end{cases} \quad (3.14.b)$$

La solution analytique recherchée devra être appliquée à un segment en aval d'un péage routier, elle sera conforme à une approche de commande de type CRONE [Oustaloup et al (1998)]. Cette commande a déjà éprouvé pour d'autres types de procédés complexes (systèmes énergétiques, processus mécanique et technologiques) [Oustaloup A. (1991)], [Nikolov E. (2004)], [Canat (2005)], [Uzunova M., Jolly D. (2006)]. il s'agira ensuite d'en vérifier les performances dans le cas des systèmes de flux de trafic routier.

Avant de réaliser la synthèse d'une telle commande nous allons présenter les propriétés du modèle en termes de robustesse relativement aux variations de ses paramètres.

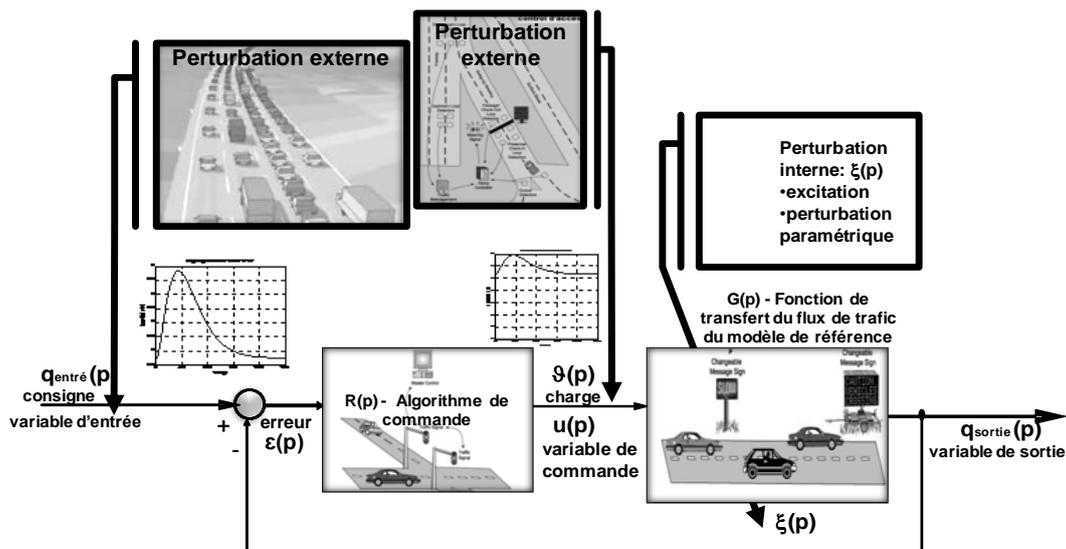


Fig.3.12. Schéma structurel d'un système de commande de flux de trafic routier

Le schéma structurel du système de commande est présenté (Fig.3.12). Si le tronçon routier est uniforme sa fonction de transfert équivalente est le modèle pris comme référence. Si la structure ou les conditions de circulation changent, le modèle équivalent sera appelé modèle perturbé.

Le résultat de la modélisation obtenu à partir de cette approche par les fonctions de transfert comparé aux résultats obtenus à partir des méthodes numériques montre une ressemblance avec le modèle METANET basé sur le modèle des liens et des nœuds. Chaque lien dans le modèle METANET représente un segment de la route. La stratégie METANET avec sa structure nodale utilise la discrétisation spatio-temporelle du schéma de Godounov pour la résolution du modèle. La modélisation analytique que nous proposons est basée sur le même principe, elle fait apparaître une série de fonctions de transfert chacune relative à un tronçon d'un segment routier (Chapitre.II). Un segment peut ainsi être décomposé en plusieurs tronçons (liens) supportant des fonctions de transferts identiques ou différentes. Les résultats de la modélisation présentés dans le chapitre.II montrent que chaque fonction de transfert correspond à un tronçon qui peut être uniforme (modèle de référence) ou non-uniforme (modèle perturbé) avec rampe d'entrée/sortie, rétrécissement etc.

Dans la suite de ce chapitre nous allons décrire le principe adopté de la commande

robuste d'ordre non entier pour la régulation du modèle macroscopique LWR du flux de trafic. Un exemple d'étude sera présenté dans le chapitre suivant (Chapitre. IV).

### III.5. Principe de base de la Commande Robuste d'Ordre Non-Entier (CRONE)

Un système de flux de trafic routier est soumis à différents types de perturbations (Tableau.4.1) qui modifient les conditions de circulation routière. L'influence des perturbations est exprimée par la variation des paramètres de la fonction de transfert du procédé. Le but de la commande CRONE est de rejeter ces perturbations et d'en diminuer leur influence notamment, en termes de performance [Oustaloup A. (1994)] et [Oustaloup A. (1995)]. Les algorithmes non-entiers ne peuvent pas être appliqués sous forme directe lorsque les systèmes sont représentés par des fonctions irrationnelles, dans ce cas il convient de transformer les modèles qui doivent être rationalisés. Plusieurs approches de développement et d'approximation des algorithmes non entiers (Annexe 5) donnent des résultats similaires parmi lesquels on peut citer :

- L'approximation avec fractions enchainées continues (A.5.7)
- L'approximation avec couple de polynômes non-symétriques (A.5.9) et (A.5.10)
- L'approximation d'une fonction de type (A.5.11)
- L'approximation de la  $\alpha^{-\text{ème}}$  racine : on reçoit un polynôme basé sur les relations (A.5.12)
- L'approximation CRONE d'Alain Oustaloup - approximation polynomiale récursive

#### III.5.1. Méthode d'approximation CRONE

Alain Oustaloup propose une méthode fréquentielle d'approximation des algorithmes non-entier à partir de laquelle a été développée la commande CRONE. Une approximation des algorithmes classiques – intégrateur, différentiateur, intégro-différentiateur non-entiers est possible en utilisant des séries polynomiales, quelles soient symétrique ou non-symétrique. La commande CRONE assure une stabilité et une performance robuste du système. La méthode montre qu'il existe un lien entre la dérivation (respectivement intégration) non-entière et récursive. La méthode repose sur la réponse fréquentielle récursive du système avec une distribution récursive des zéros et les pôles [Oustaloup A. et al. 1999], [Canat 2005] (4.24). Une correction du comportement du système est réalisée en ajoutant des zéros et des pôles dans la boucle de commande. L'algorithme permet de créer un intégrateur (respectivement un différentiateur ou intégro-différentiateur) non entier en le représentant par une suite de cellules rationnelles d'intégro-différentiateurs (ID) en utilisant la relation (3.14).

$$\left\{ \begin{array}{l} R(p) = (p)^\alpha - \text{fonction irrationnelle} \rightarrow \hat{R}(p) = C \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{1 + \frac{p}{\omega_i}} - \text{fonction rationnelle} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Pour obtenir les paramètres fréquentiels des polynômes du numérateur et du

dénominateur de chacune des cellules [A. Oustaloup 1998] on utilise la relation (3.15)

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \eta; \frac{\omega_i}{\omega_i} = \lambda; \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \eta\lambda; \alpha = \frac{\log \lambda}{\log(\lambda\eta)} \quad (3.16)$$

La méthode d'obtention des algorithmes rationnels des régulateurs non-entiers est basée sur le critère d'invariance des marges de stabilités (les marges de gain et de phase qui sont observées dans les plans de Nyquist, de Bode et de Black-Nichols), les conditions de performance (3.14.a) et de stabilité (3.14.b) robustes du système. On utilise un modèle polynomial de type cellulaire, en utilisant  $n$ -nombre de cellules de type ID, dont le rôle est d'obtenir une enveloppe fréquentielle (Fig.3.13) pour laquelle les marges de stabilités sont invariantes. Cette enveloppe est connue le plus souvent comme un gabarit vertical (dans le plan de Black-Nichols) et un gabarit horizontal (sur le diagramme de Bode). Il se représente comme une droite (entre les deux limites fréquentielle) sur le lieu de Nyquist. Ce gabarit est caractérisé par une valeur prédéfinie de la phase du régulateur qui dépend du rapport fréquentiel de chaque cellule, de l'ordre non entier de synthèse du régulateur et par sa largeur qui dépend proportionnellement du nombre de cellules utilisées. Le résultat montre un même profil de la phase du régulateur pour chaque cellule qui présente un simple décalage (Fig.3.14) pour un intégrateur et ainsi que pour un algorithme PID.

Les algorithmes robustes non entiers présentent un rétrécissement autour de leur fréquence de coupure, ce qui augmente les performances et la stabilité robustes du système pour toute variation des paramètres.

### III.5.2. Conditions et paramètres de base de la méthode d'approximation

*Les conditions initiales de synthèse sont liées à la connaissance :*

1. de la valeur de la fréquence de coupure du modèle du procédé -  $\omega_u$ ;
2. du nombre de cellules qui permet d'approximer la fonction non-entière -  $N$ ;
3. de la valeur de l'ordre de l'approximation -  $\alpha$ ;
4. de la constante de normalisation pour obtenir la fréquence réduite -  $C$ .

*Les paramètres de l'approximation sont :*

1. les valeurs des fréquences de chaque cellule -  $\omega'_i, \omega_i$ ;
2. la marge de phase -  $F_m$ ;
3. le facteur de résonance -  $Q$ ;
4. l'ordre non-entier -  $\alpha$ .

Pour cette approximation on établit un gabarit fréquentiel symétrique (entre les marges de fréquences basse et haute) autour la fréquence de coupure (Fig.3.13) du modèle du procédé définissant ainsi le gabarit généralisé (Fig.3.14). Tout cela amène le système à avoir une

invariance des marges de stabilité pour ce gabarit. Cette invariance assure les propriétés robustes du modèle et aide à rejeter les perturbations.

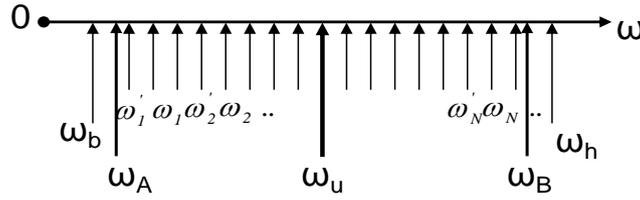


Fig. 3.13. Gabarit fréquentiel symétrique

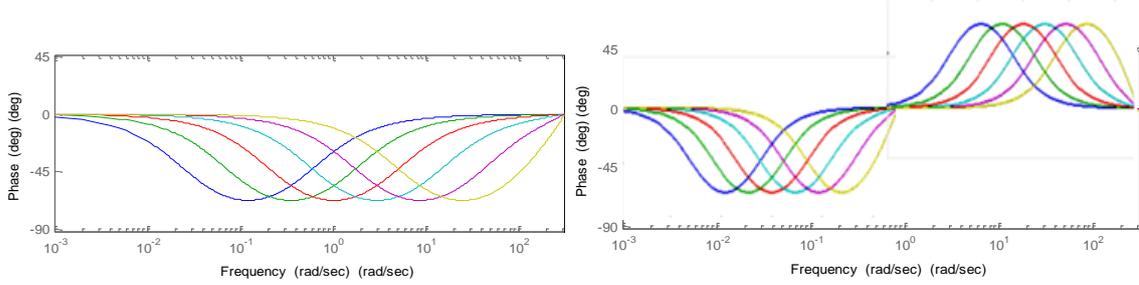


Fig. 3.14. Diagramme de Bode d'un algorithme non-entier I et PID, approximation avec 6 cellules de type intégrateur-différentiel

### III.5.3. Approche de résolution - propriétés et synthèse d'un correcteur CRONE sur la base d'une approximation polynomiale récursive (cellules ID)

La conception de l'approximation est basée sur les relations de (3.17) à (3.20)

$$\begin{cases} \omega_u = C\omega_c, C = \text{const}(250 \div 1000) \\ \omega_A = 0.1\omega_u, \omega_B = 10\omega_u ; \omega_b = 0.5\omega_A, \omega_h = 1.2\omega_B \\ m' = n - \alpha' \quad n = \text{const}, \alpha' = \text{var}(0 \leq n' \leq n), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\left(1 - \frac{F_m}{\pi}\right) \Leftrightarrow F_m = \pi - \alpha \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{Q}\right) \Leftrightarrow Q = \frac{1}{\sin(\alpha)\pi/2} \\ m' = n - 2\left(1 - \frac{F_m}{\pi}\right) = n - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{Q}\right) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} \lambda\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}} = \text{const} \\ \eta = (\lambda\eta)^{0.9-m'} = \left(\left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{0.9-m'} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{0.9-m'}{N}} \\ \lambda = \frac{\lambda\eta}{\eta} = \frac{\lambda\eta}{(\lambda\eta)^{0.9-m'}} = (\lambda\eta)^{1-(0.9-m')} = (\lambda\eta)^{0.1+m'} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{0.1+m'} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases}
 R(p) = \frac{(\omega_1')^{-1} p + 1}{(\omega_1)^{-1} p + 1} \frac{(\omega_2')^{-1} p + 1}{(\omega_2)^{-1} p + 1} \dots \frac{(\omega_i')^{-1} p + 1}{(\omega_i)^{-1} p + 1}, \quad i = \overline{1, N} \\
 \begin{cases} \omega_1' = (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_1 = (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{cases}; \quad \begin{cases} \omega_2' = (\lambda \eta) (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_2 = (\lambda \eta) (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{cases}; \\
 \begin{cases} \omega_2' = (\lambda \eta)^2 (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_2 = (\lambda \eta)^2 (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{cases}; \dots \dots \begin{cases} \omega_i' = (\lambda \eta)^{i-1} (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_i = (\lambda \eta)^{i-1} (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{cases}
 \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour choisir les paramètres initiaux de synthèse nous avons réalisé une étude de variation des paramètres de la commande CRONE et vérifié leur influence sur les propriétés du système. A partir des résultats (Fig.3.15) et (Fig.3.16) nous pouvons constater que l'argument du système, sa marge de phase et son facteur de résonance dépendent du choix de l'ordre non-entier dans la synthèse.

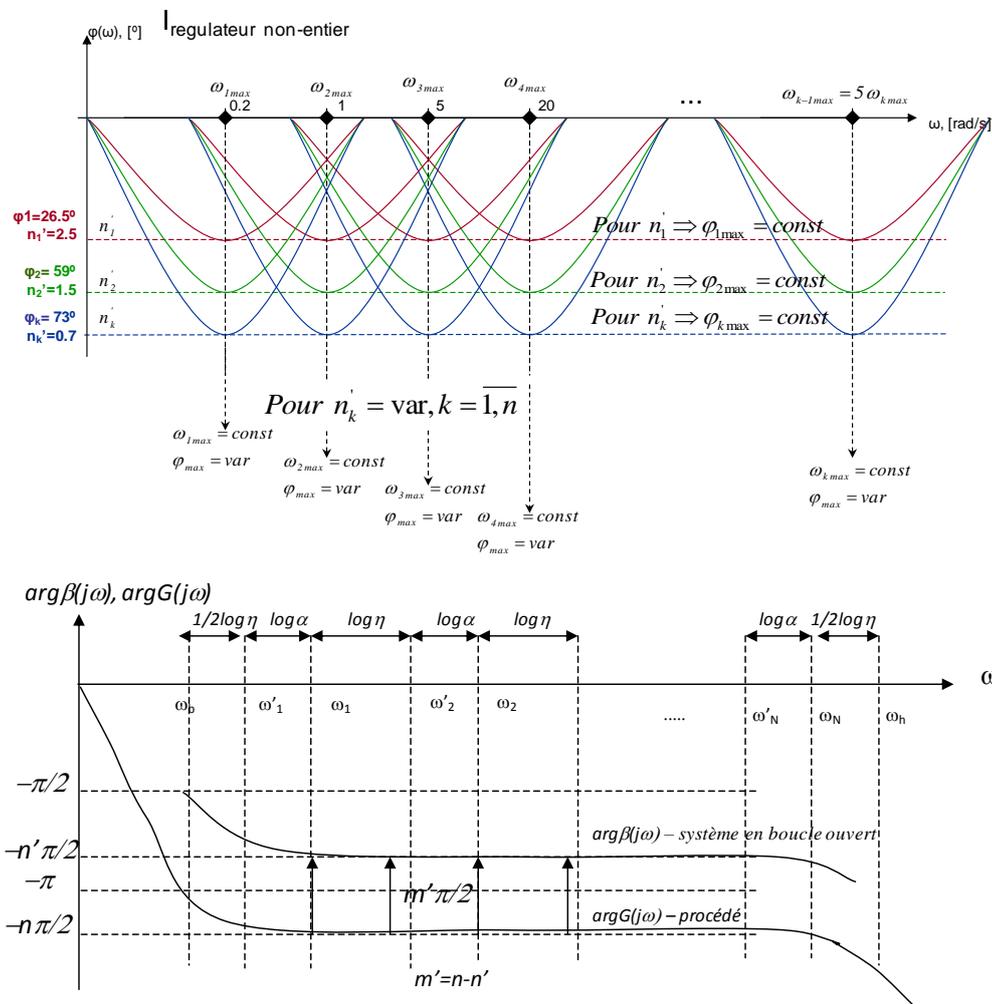


Fig.3.15. Diagramme de Bode d'un régulateur intégral non-entier, approximation avec  $k$  cellules de type intégro-différentielle

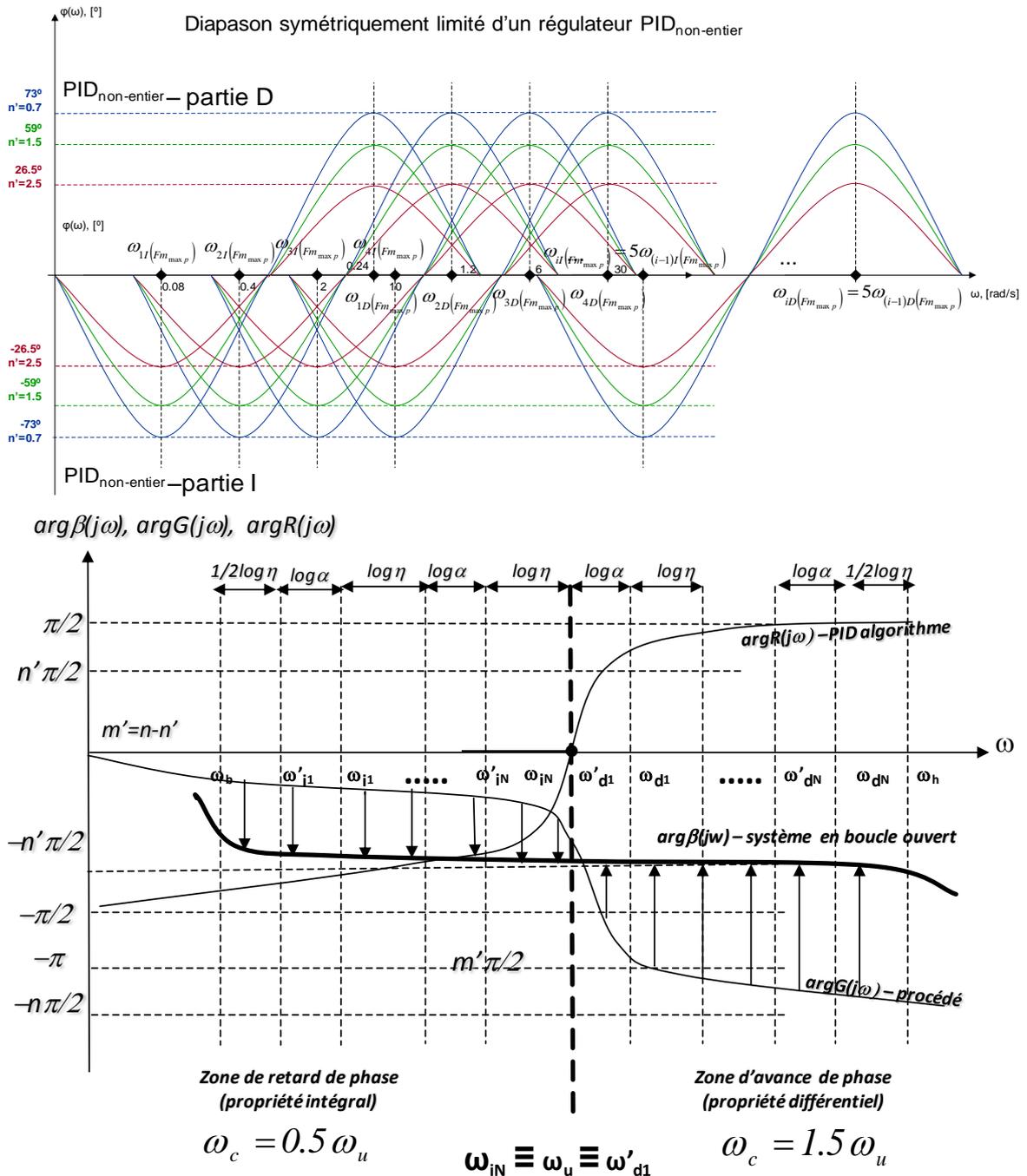


Fig.3.16. Diagramme de Bode d'un régulateur intégral non-entier, approximation avec  $k$  cellules de type intégro-différentielle

L'approche de commande CRONE qui a été présentée ci-dessus, a été appliquée sur le modèle macroscopique LWR de flux de trafic routier (3.17)-(3.20) (Fig.3.15) et (Fig.3.16). La conception de la méthode de synthèse est présentée dans le dernier chapitre dans le cas d'un segment routier à la sortie d'un péage dans le but de contrôler la densité de véhicules dans les segments en aval.

### **III.6. Analyse et conclusions**

Nous avons présenté dans ce troisième chapitre l'intérêt de concevoir un système de commande pour que celui-ci puisse répondre aux problèmes de trafic routier et satisfaire les besoins du réseau et des usagers. Tout d'abord nous avons fait un rappel des commandes connues, souvent utilisées dans le cas des modèles macroscopiques. Par la suite nous avons présenté la nécessité de concevoir un système de commande robuste, d'où notre choix de développer une commande CRONE dans ce cadre applicatif. Nous avons rappelé la théorie de l'incertitude et des perturbations replacées dans le cadre des systèmes de flux de trafic routiers. Nous avons mis plutôt l'accent sur les conditions et les exigences que notre système de commande doit satisfaire et les moyens de rejeter les perturbations. Le chapitre se termine par une présentation de la conception de la commande robuste d'ordre non entier, qui sera développée et appliquée dans deux cas d'études (deux systèmes de commande) dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE IV: APPLICATION CRONE POUR LA COMMANDE DES FLUX DE TRAFIC ROUTIER

## Etude et analyse des systèmes de CONCEPTION, MODELISATION, ANALYSE, SIMULATION

### **IV.1. Conception, critère et algorithme d'un système de commande robuste d'ordre non entier (CRONE) – description et analyse**

#### **IV.1.1. Système CRONE avec prédicteur de Smith**

#### **IV.1.2. Système CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation**

### **IV.2. Application des commandes non-entières : avec prédicteur de Smith et avec une compensation du retard pour le flux de trafic routier**

#### **IV.2.1. Obtention de l'algorithme du régulateur – pour le système de commande CRONE**

#### **IV.2.2. Obtention de l'algorithme du filtre – pour le système de commande CRONE**

### **IV.3. Schémas technologiques**

#### **IV.3.1. Pour la commande d'un segment simple**

#### **IV.3.1. Pour la commande d'un segment composé – système en cascade**

### **IV.4. Résultats de simulation**

#### **IV.4.1. Analyse d'un segment simple avec des perturbations externes**

##### **IV.4.1.1. Système CRONE avec prédicteur de Smith**

##### **IV.4.1.2. Système CRONE avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation**

##### **IV.4.1.3. Comparaison entre les deux commandes**

#### **IV.4.2. Analyse d'un segment composé - système en cascade avec une commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation**

### **IV.5. Conclusions**

Le travail présenté dans ce manuscrit s'articule autour de deux parties : la modélisation et la commande. Nous avons présenté l'objectif de la modélisation dans les chapitres précédents et les besoins d'étudier une commande, notamment une commande robuste de type CRONE. Celle-ci, a pour objet d'assurer la stabilité et les performances robustes du trafic en aval d'un péage routier, en mesurant la densité, le débit et la vitesse. Les conditions de circulation routière à partir desquelles sont élaborées les lois de commande sont données par la densité de véhicules observée dans les segments en aval du péage. La commande agit sur le nombre de cabines de péage ouvertes aux conducteurs et sur leur temps de passage. La rétention des voitures en amont du péage assure une diminution de la densité en aval, dans le cas d'une forte demande sur la voie

principale.

L'objectif de la commande est d'assurer que le processus soit toujours dans un état stable avec une densité de véhicules au-dessous d'une valeur critique, sans tenir compte des différentes perturbations et de leurs influences. Ceux-ci apparaissent sous forme d'une variation des paramètres du modèle et/ou de sa structure. En général les perturbations agissent sur le système comme le font les signaux d'entrée (qui vont changer la densité de véhicules dans le segment routier). Ils apparaissent souvent en différents points dans le schéma structurel du système asservi. Ils peuvent se présenter comme des rampes, des rétrécissements, des fermetures de voies, des accidents etc. La nature distribuée du modèle du trafic, ainsi que les perturbations qui provoquent des modifications dans les conditions de circulation justifient la nécessité de mettre en place une commande robuste. Dans ce chapitre nous allons traiter un exemple de calculs et de simulation en se basant sur les méthodes et les analyses proposées dans les chapitres précédents.

Nous proposons deux schémas structurels pour le contrôle d'un segment en aval d'un péage routier basé sur des structures classiques de commande avec prédicteur de Smith et filtre de compensation [Ingimundarson A. et al. (2001)], [Normey-Rico J.E. et al. (2008)], [Guzmán J.L. et al.(2007)], [Nikolov (2005)]. Le premier, est un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et le deuxième ajoute au premier un filtre de compensation. Les études développées, concernent l'application de ce type de commandes pour deux structures routières : un segment routier simple et un segment routier avec une rampe d'entrée.

Une comparaison des résultats des différentes structures et de l'efficacité de la commande est également proposée (cf. Chapitre.II). De plus le diagramme fondamental du système a été reconstruit de manière à vérifier la pertinence de la modélisation et de la commande proposée.

## **VI.1. Conception, critère et algorithme d'un système de commande robuste d'ordre non entier (CRONE) – description et analyse**

Dans un premier nous allons présenter différentes structures de systèmes de commande, afin de justifier notre choix (Schéma.4.1) :

1. structure classique,
2. structure avec prédicteur de Smith classique,
3. structure avec prédicteur de Smith non entier,
4. structure avec prédicteur de Smith et compensation par filtre non entier.

Système de commande	Algorithme du régulateur du système de commande	Fonction de transfert du système en boucle fermé
<p>Système classique</p>	$R(p)$	$\Phi(p) = \frac{RG_{rat}e^{-p\tau^*}}{1 + R\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}$
<p>Système avec prédicteur de Smith</p>	$R_c(p) = \frac{R(p)}{1 + R(p)G_{rat}(p)(1 - e^{-p\tau^*})}$	$\Phi_c(p) = \frac{R_c\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}{1 + R_c\hat{G}_{rat}}$
<p>Système avec prédicteur de Smith non-entier</p>	$R_c(p) = \frac{R_{NE}(p)}{1 + R_{NE}(p)G_{rat}(p)(1 - e^{-p\tau^*})}$	$\Phi_c(p) = \frac{R_c\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}{1 + R_c\hat{G}_{rat}}$
<p>Système avec Smith non-entier et filtres non-entier</p>	$R_{cF}(p) = \frac{R_{NE}(p)F(p)}{1 + R_{NE}(p)G_{rat}(p)(1 - F^2(p)e^{-p\tau^*})}$	$\Phi_{cF}(p) = \frac{R_{cF}\hat{G}_{rat}}{1 + R_{cF}\hat{G}_{rat}}$

Schéma.4.1. Descriptif et analyse des schémas de commande

Le processus de flux de trafic a deux caractéristiques principales. En premier lieu, nous sommes arrivés à la conclusion que le modèle du processus peut être assimilé à un retard (cf. Chapitre.2)  $G(p)=G_{rat}(p)e^{-p\tau^*}$ . Cela nous impose de proposer une structure de commande susceptible de compenser au mieux ce retard. Il s'agit aussi d'un processus distribué, soumis à de nombreuses perturbations ce qui a tendance à nous orienter vers la mise en place d'une commande de la classe des systèmes robustes. Ces deux caractéristiques nous ont guidés vers l'étude d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation (Schéma.4.1). Dans le schéma.4.1, nous proposons les expressions analytiques de la boucle de régulation et des fonctions de transfert des systèmes en boucles fermés. En comparant les expressions analytiques des quatre types de systèmes, nous pouvons conclure, que le système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et avec le filtre de compensation ne contient pas un retard, quand la condition  $G(p) = G^*(p) = G(p)_{rat}e^{-p\tau^*}$  est satisfaite.

L'analyse des quatre systèmes fait apparaître que la partie irrationnelle du retard existe dans les deux expressions pour le système de commande classique. Le même retard, va disparaître du polynôme caractéristique dans le cas d'un système avec un prédicteur de Smith. Dans la suite, si nous proposons une structure d'ordre non entier pour le schéma avec prédicteur

de Smith, nous allons assurer des performances et la stabilité robustes du système. Cette exigence de robustesse, provient de la nature incertaine du modèle. Ainsi conçu, la structure CRONE va améliorer le système de prédiction de Smith classique. Le dernier schéma structurel du Tableau.4.1., montre une structure CRONE avec un prédicteur de Smith et un filtre de compensation. Les calculs et les transformations font apparaître que le retard dans l'expression analytique du système en B.O. et dans le polynôme caractéristique du système en B.F. est complètement compensé grâce au filtre de compensation. Dans ce dernier schéma l'algorithme du filtre et du régulateur sont choisis non entier pour les mêmes raisons de robustesse.

La démarche de synthèse robuste est très importante, car elle assure non seulement une invariance du système aux perturbations, mais aussi aux fluctuations dans les paramètres du retard. Cette dernière peut provoquer une instabilité du système comme dans le cas du système avec un prédicteur de Smith classique. Dans le cas d'un système non entier avec un prédicteur de Smith et un filtre de compensation, nous avons obtenu analytiquement la fonction de transfert du régulateur après quelques étapes de transformation (Annexe 7). Les paramètres du régulateur et du filtre sont obtenus, en utilisant la méthode d'approximation polynomiale récursive. Cela amène le système dans la classe des systèmes robustes d'ordre non entier et l'éloigne des schémas classiques. Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter la conception, la méthode, les critères et les algorithmes de commande non entière. Les deux exemples d'un segment simple et d'un segment avec une rampe d'entrée, sont présentés vers la fin de ce chapitre.

### IV.1.1. Système CRONE avec prédicteur de Smith

#### IV.1.1.1. Conception

Pour obtenir les paramètres du régulateur (Fig.4.2) d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith (Fig.4.1), nous utilisons la conception d'une approximation polynomiale récursive (5.3)-(5.6).

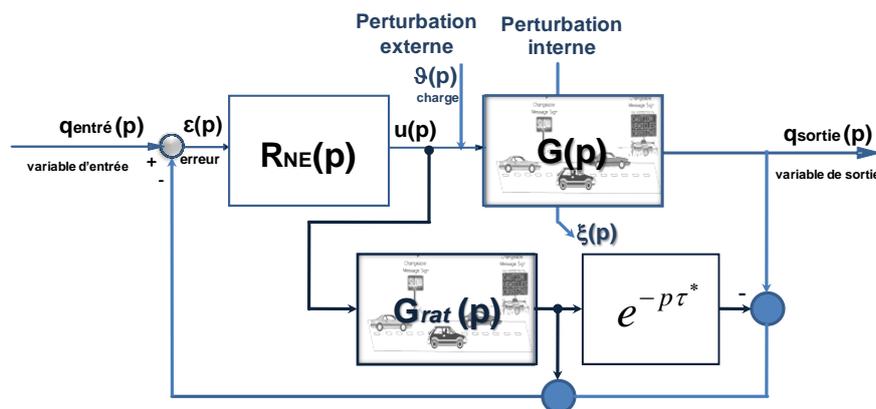


Fig.4.1. Système de commande avec un prédicteur de Smith d'ordre non entier

Ce schéma structurel contient une boucle de prédiction du retard, où l'expression du système en boucle fermée est présentée dans (4.1) sous la contrainte :  $G(p) = G^*(p) = G(p)_{rat} e^{-p\tau^*}$ .

$$\Phi_c(p) = \frac{R_c(p)G(p)}{1 + R_c(p)G(p)} = \frac{R_c(p)G(p)_{rat} e^{-p\tau^*}}{1 + R_c(p)G(p)_{rat}} \quad (4.1)$$

Le régulateur  $R_c(p)$  contient dans sa structure :

- l'algorithme du correcteur non entier  $R(p)$  (Fig.4.3), représenté par les relations (4.3)-(4.6) ;
- le contour du prédicteur de Smith.

Le régulateur  $R_c(p)$  du schéma structurel de la (Fig.4.2) est représentée par l'expression (4.2).

$$R_c(p) = \frac{R_{NE}(p)}{1 + R_{NE}(p)G_{rat}(p)(1 - e^{-p\tau^*})} \quad (4.2)$$

#### IV.1.1.2. Méthode et critère de synthèse d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith

L'approximation polynomiale récursive est représentée par les relations (4.3)-(4.6) pour la synthèse du régulateur  $R_{NE}(p)$  (Fig.4.2). Il s'agit d'un algorithme intégrateur-différentiateur non entier, où les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  désignent l'ordre non entier respectivement de la partie intégrateur et de la partie différentiateur (4.3).

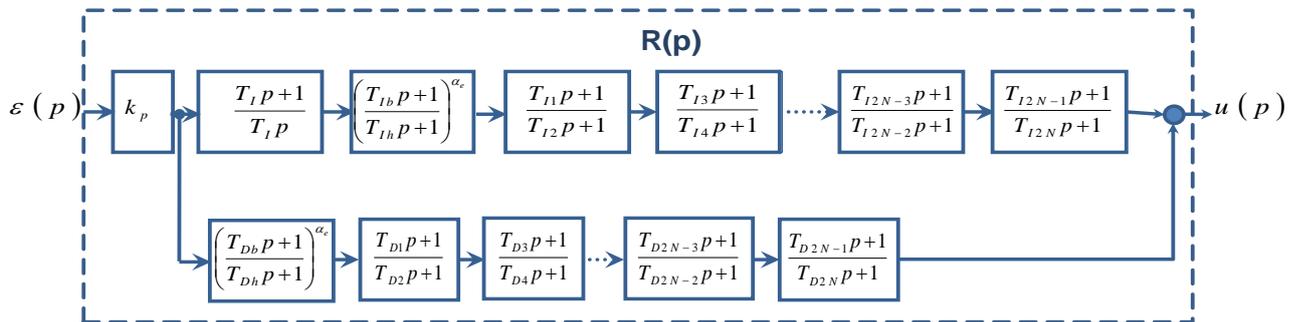


Fig.4.2. Algorithme de synthèse du régulateur

La méthode récursive de distribution des zéros et des pôles, pour un gabarit fréquentiel (Fig.4.3), est obtenue en respectant les relations (4.3) - (4.6).

$$R(p) = I_{app}^\alpha D_{app}^\beta(p) = k_I \left( \frac{1 + T_{bl}p}{1 + T_{hl}p} \right)^{\alpha_e} \prod_{i=1}^M \frac{(1 + T'_i p)}{(1 + T_i p)} + k_D \left( \frac{1 + T_{bd}p}{1 + T_{hd}p} \right)^{\beta_e} \prod_{j=1}^N \frac{(1 + T'_j p)}{(1 + T_j p)} \quad (4.3)$$

$$\forall \omega (\bar{\ell}_a, \bar{\ell}_m) \in [\omega_A, \omega_B], (T'_i) < (T_i), (T'_j) > (T_j);$$

$$k_I \neq k_D; i \neq j; T_{bl}^{-1} < T_{hl}^{-1} < T_{bd}^{-1} < T_{hd}^{-1} \quad (4.4)$$

$$\{ |\alpha| > 1, \alpha_e + \alpha_n = \alpha \}, \{ \beta > 1, \beta_e + \beta_n = \beta \}$$

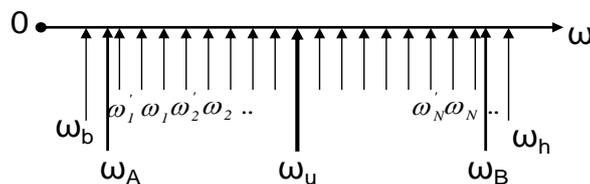


Fig. 4.3. Gabarit fréquentiel de distribution des zéros et des pôles du régulateur

$$R_{(ID)_{app}} = k \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^{\alpha_e} \left[ \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega_{Ii})^{-1})(1 + j\omega(\omega_0)^{-1})}{(1 + j\omega(\omega'_{Ii})^{-1})(j\omega(\omega_0)^{-1})} + \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega'_{Di})^{-1})}{(1 + j\omega(\omega_{Di})^{-1})} \right] \quad (4.5)$$

$$\forall \omega (\bar{\ell}_a, \bar{\ell}_m) \in [\omega_{IA}, \omega_{DB}], \{ \alpha > 1, \alpha_e + \alpha_n = \alpha \};$$

$$(\omega'_{Ii})^{-1} > (\omega_{Ii})^{-1} > (\omega_0)^{-1}; (\omega'_{Di})^{-1} > (\omega_{Di})^{-1};$$

$$(\omega'_{Di})^{-1} > (\omega_{Di})^{-1} > (\omega'_{Ii})^{-1} > (\omega_{Ii})^{-1} > (\omega_0)^{-1}$$

$$k_D = k_I = \left\{ \left\{ a \left[ \frac{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_{Dh}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_{Ib}} \right)^2} \right]^{\frac{\alpha_e}{2}} \prod_{i=1}^N \left[ \frac{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega'_{Ii}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega_u}{\omega_{Ii}} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} ; a = \frac{1}{|G^*(j\omega_u)|} \right\} \quad (4.6)$$

Le critère utilisé dans la conception du régulateur non entier est appelé « *gabarit généralisé* » ou « *gabarit vertical* » (Fig.4.4). Il consiste dans l'invariance des marges de stabilité du système de commande (4.5). La relation montre, que pour le gabarit de fréquence (Fig.4.3), le système de commande doit respecter la condition de robustesse (4.7.1) et de l'invariance des marges de module (MG) et de phase (MP) (4.7.2) de la Fig.4.4.

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{l} \ell_a(j\omega) = \hat{G}^\#(j\omega) - \hat{G}^*(j\omega); |\ell_a(j\omega)| \leq \bar{\ell}_a(j\omega) \\ \ell_m(j\omega) = \frac{\ell_a(j\omega)}{\hat{G}^*(j\omega)}; |\ell_m(j\omega)| \leq \bar{\ell}_m(\omega) \end{array} \right\} \quad (4.7.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MG \equiv 20 \log_{10} \left| W_{SNE}^{gabarit\ généralisé}(\xi, j\omega_\pi) \right| \equiv const, [dB] \\ \omega_\pi^{nom} : arg W_{SNE}^{nom}(j\omega_\pi^{nom}) = -\pi \Leftrightarrow GM_m^{nom}(\omega_\pi^{nom}) \\ MP \equiv - \left( arg \left( W_{SNE}^{gabarit\ généralisé}(\xi, j\omega_u) \right) + 180^\circ \right) \equiv const, [deg] \\ \omega_u^{nom} : |W_{SNE}^{nom}(j\omega_u^{nom})| = 1 \Leftrightarrow PM_m^{nom}(\omega_u^{nom}) \end{array} \right. \quad (4.7.2)$$

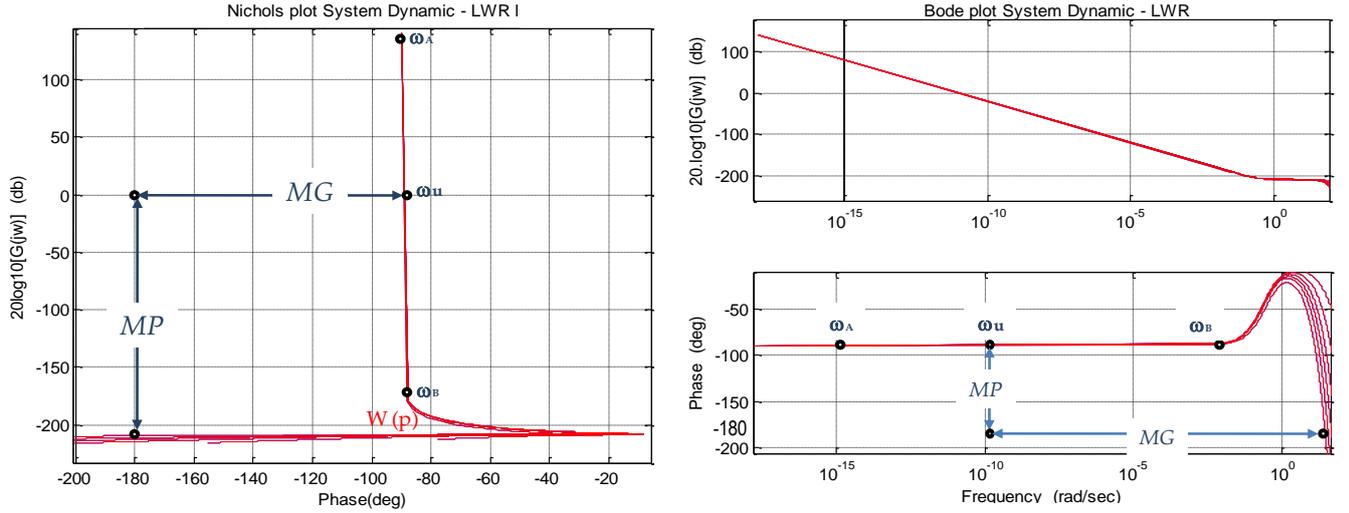


Fig.4.4. Critère fréquentiel d'un « gabarit généralisé » - dans la conception CRONE – dans le plan de Black-Nichols ce gabarit est appelé « gabarit vertical » et dans le diagramme de Bode - « gabarit horizontal »

#### IV.1.1.3. Algorithme de synthèse d'un régulateur non entier

Tout algorithme de synthèse d'une approximation polynomiale réursive à un régulateur ID non entier (CRONE) est réalisé selon la relation (4.8) :

$$I^\alpha D^\beta (p) \approx I_{app}^\alpha D_{app}^\beta (p) \quad (4.8)$$

Les *conditions initiales* de synthèse de l'algorithme du régulateur non entier sont : la valeur de la fréquence de coupure du modèle du procédé de référence  $\omega_c$ , l'ordre du polynôme de l'approximation rationnelle  $n$ , le nombre de cellules d'approximation  $N$ , l'ordre non entier de synthèse  $n'$ .

Les *étapes de l'algorithme* de synthèse d'un régulateur  $I^\alpha D^\beta$  non entier sont représentées par les expressions (4.9.1) – (4.9.4), afin d'obtenir les paramètres, en terme de rapports fréquentiels, de l'approximation réursive (4.10) et tous les paramètres du régulateur (4.11).

$$\left\{ \alpha = 2 \left( 1 - \frac{F_m}{\pi} \right) \Leftrightarrow F_m = \pi - \alpha \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{1}{Q} \right) \Leftrightarrow Q = \frac{1}{\sin(\alpha) \pi / 2} \right. \quad (4.9.1)$$

$$m' = n - 2 \left( 1 - \frac{F_m}{\pi} \right) = n - \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{1}{Q} \right) \Rightarrow m' = n - \alpha' n = const, \alpha' = \text{var} (0 \leq n' \leq n) \quad (4.9.2)$$

$$\lambda = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(0.1+\alpha)} ; \eta = \left( \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}} \right)^{(0.9-\alpha)} \quad (4.9.3)$$

$$\omega_u = C \omega_c, C = const (250 \div 1000) \Rightarrow \omega_u = 250 \omega_c, \frac{\omega_h}{\omega_b} = 600 \quad (4.9.4)$$

$$\omega_{IA} = 0.1 \omega_u, \omega_{IB} = 0.9 \omega_u ; \omega_{IA} = 1.1 \omega_u ; \omega_{DB} = 10 \omega_u ; \omega_b = 0.2 \omega_A, \omega_h = 1.2 \omega_B$$

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_1 = (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = (\lambda \eta) (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_2 = (\lambda \eta) (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = (\lambda \eta)^2 (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_2 = (\lambda \eta)^2 (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{array} \right. ; \dots ; \left\{ \begin{array}{l} \omega_i = (\lambda \eta)^{i-1} (\eta)^{0.5} (\omega_b) \\ \omega_i = (\lambda \eta)^{i-1} (\eta)^{0.5} (\omega_b) \lambda \end{array} \right. \end{cases} \quad (4.10)$$

$$i = \overline{1, N}$$

$$R_{(ID)_{app}} = (I^\alpha D^\beta)_{app} = k \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^{\alpha_e} \left[ \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega_{i_i})^{-1})(1 + j\omega(\omega_0)^{-1})}{(1 + j\omega(\omega'_{i_i})^{-1})(1 + j\omega(\omega_0)^{-1})} + \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega'_{Di})^{-1})}{(1 + j\omega(\omega_{Di})^{-1})} \right] \quad (4.11)$$

## IV.1.2. Système CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation

### IV.1.2.1. Conception

La deuxième structure proposée est relative à la conception d'un système CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation. Quelques étapes de calcul sont représentées sur les Fig.4.5.a, Fig.4.5.b, et Fig.4.5.c. L'ensemble des calculs est présenté dans l'annexe 7. L'algorithme de contrôle est donné par (4.13) et l'expression du système en B.F. est donnée par la relation (4.12). Ce système de commande est une amélioration du système de commande présenté dans la section IV.1.1. Il permet de compenser en totalité le retard dont dépend pour l'essentiel le modèle du système de flux de trafic. Partant d'une structure de commande représenté sur la Fig.4.5.a., et après les transformations représentées (Fig.4.5.b), nous arrivons à une représentation classique (Fig.4.5.c), dans lequel l'élément de contrôle est représentée par  $R_{cF}(p)$  (4.13).

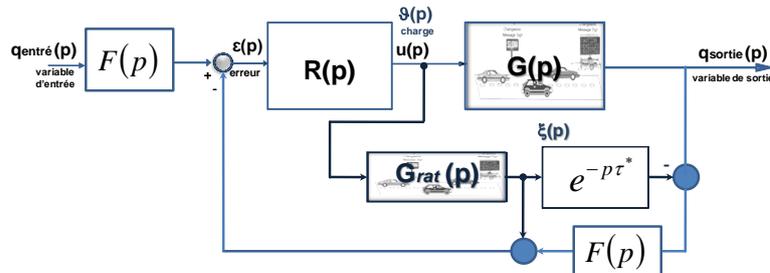


Fig.4.5.a. Schéma structurel d'un système avec prédicteur de Smith et compensation du retard

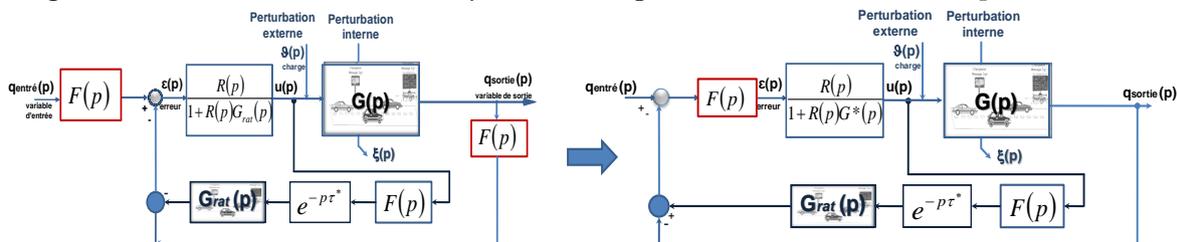


Fig.4.5.b. Schéma structurel d'un système avec prédicteur de Smith et compensation du retard

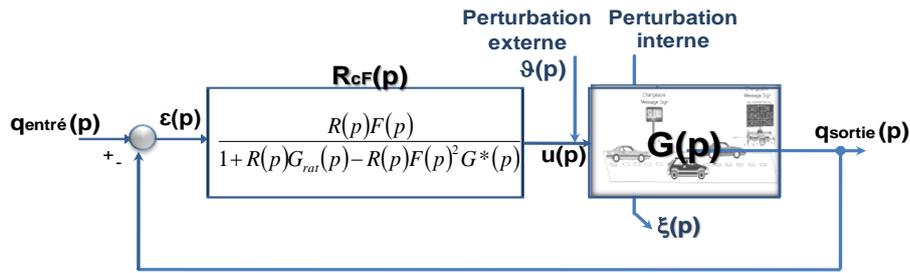


Fig.4.5.c. Schéma structurel classique équivalent avec prédiction et compensation du retard dans le système

$$\Phi_{cF}(p) = \frac{R_c(p) G_{rat}(p) e^{-p \tau^*} F(p)}{1 + R_c(p) G_{rat}(p)} \quad (4.12)$$

$$R_{cF}(p) = \frac{R(p) F(p)}{1 + R(p) G_{rat}(p) (1 - F^2(p) e^{-p \tau^*})} \quad (4.13)$$

Le régulateur  $R_{cF}(p)$  (4.13) contient :

- l'algorithme du correcteur non entier  $R(p)$  suivant la conception (Fig.4.2), représentée par les relations (4.3)-(4.6) ;
- le contour de prédiction de Smith de la boucle interne  $R_c(p)$  (4.12) ;
- un filtre  $F(p)$  (4.14).

Le but du choix d'une structure de commande représenté (Fig.4.5.a) avec une prédiction  $R_c(p)$  et compensation par le filtre  $F(p)$ , se résume dans la condition (4.14). Ceci permet de compenser le retard et ainsi d'obtenir le système sous la forme (4.15).

$$e^{-p \tau^*} F(p) \equiv 1 \quad (4.14)$$

$$\Phi(p) = \frac{R(p) G_{rat}(p)}{1 + R(p) G_{rat}(p)} \quad (4.15)$$

#### IV.1.2.2. Méthode et critère de synthèse d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation

Pour réaliser la synthèse du filtre de compensation non entier, nous allons utiliser comme précédemment l'approximation polynomiale récursive (4.16.1) et (4.16.2). Pour la structure avec le filtre de compensation, nous utilisons également le critère du « gabarit généralisé » pour les algorithmes de synthèse de  $R(p)$  et  $F(p)$ . Les propriétés générales attendues sont d'assurer des performances robustes du système, c'est à dire l'invariance des marges de stabilités : MG et MP et la compensation du retard dans le système. Pour l'algorithme du régulateur, nous proposons le critère de conception d'un algorithme non entier décrit de (4.17.1) à (4.17.3), utilisé pour le régulateur du système de la (Fig.4.5.c). Pour la conception du filtre non entier nous avons choisi l'approximation d'un différentiateur non entier selon (4.16.2) (Fig.4.6).

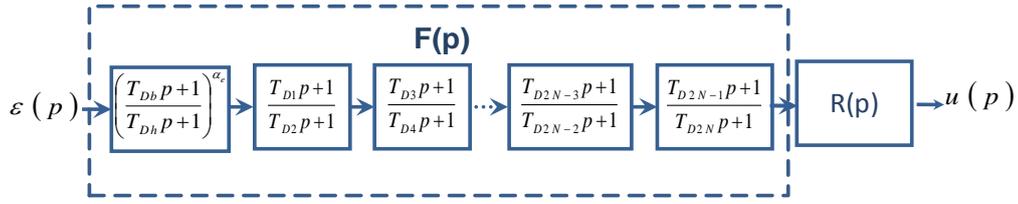


Fig.4.6. Algorithme de synthèse du régulateur

La méthode de synthèse du régulateur et du filtre non entier est représentée par les relations (4.16.1) et (4.16.2).

$$(ID)_{app} = k_0 \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^{\alpha_e} \left[ \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega_i)^{-1})(1 + j\omega(\omega_0)^{-1})}{(1 + j\omega(\omega'_i)^{-1})(j\omega(\omega_0)^{-1})} + \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + j\omega(\omega'_{Di})^{-1}}{1 + j\omega(\omega_{Di})^{-1}} \right) \right] \quad (4.16.1)$$

$$\forall \omega (\bar{\ell}_a, \bar{\ell}_m) \in [\omega_{IA}, \omega_{DB}], \{ \alpha > 1, \alpha_e + \alpha_n = \alpha \};$$

$$(\omega'_{Ii})^{-1} > (\omega_{Ii})^{-1} > (\omega_0)^{-1}; (\omega'_{Di})^{-1} > (\omega_{Di})^{-1};$$

$$(\omega'_{Di})^{-1} > (\omega_{Di})^{-1} > (\omega'_{Ii})^{-1} > (\omega_{Ii})^{-1} > (\omega_0)^{-1}$$

$$F(j\omega) = F_\tau D^\zeta \hat{=} F_\tau D_{app}^\zeta \hat{=} \frac{(1 + j\omega)}{(1 + j\omega\tau_F)} \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\zeta \prod_{i=1}^N \left( 1 + j\frac{\omega}{\omega'_i} \right) \left( 1 + j\frac{\omega}{\omega_i} \right)^{-1} \quad (4.16.2)$$

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{l} \ell_a(j\omega) = \hat{G}^\bullet(j\omega) - \hat{G}^*(j\omega); |\ell_a(j\omega)| \leq \bar{\ell}_a(j\omega) \\ \ell_m(j\omega) = \frac{\ell_a(j\omega)}{\hat{G}^*(j\omega)}; |\ell_m(j\omega)| \leq \bar{\ell}_m(\omega) \end{array} \right\} \quad (4.17.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MG \equiv 20 \log_{10} \left| W_{SNE}^{gabarit \text{ généralisé}}(\xi, j\omega_\pi) \right| \equiv const, [dB] \\ \omega_\pi^{nom} : \arg W_{SNE}^{nom}(j\omega_\pi^{nom}) = -\pi \Leftrightarrow GM_m^{nom}(\omega_\pi^{nom}) \\ MP \equiv - \left( \arg \left( W_{SNE}^{gabarit \text{ généralisé}}(\xi, j\omega_u) \right) + 180^\circ \right) \equiv const, [deg] \\ \omega_u^{nom} : |W_{SNE}^{nom}(j\omega_u^{nom})| = 1 \Leftrightarrow PM_m^{nom}(\omega_u^{nom}) \end{array} \right. \quad (4.17.2)$$

$$\left| \exp(-j\omega\tau^*) F(j\omega) D_{app}^\zeta(j\omega) \right| = 1, \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2], (\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1)$$

$$\angle \left( \exp(-j\omega\tau^*) F(j\omega) D_{app}^\zeta(j\omega) \right) = 0, \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2], (\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1) \quad (4.17.3)$$

$$F(j\omega) = F_\tau D^\zeta \hat{=} F_\tau D_{app}^\zeta$$

#### IV.1.2.3. Algorithme de synthèse d'un filtre non entier

L'algorithme de synthèse du filtre non entier est représenté par la contrainte exprimée par la relation (4.18).

$$F(j\omega) \approx F_\tau D^\zeta \hat{=} F_\tau D_{app}^\zeta \quad (4.18)$$

Pour la conception du filtre, il faut déduire les conditions initiales à partir des paramètres du modèle de référence. Ce sont : la valeur du retard temporel  $\tau^*$  du modèle de référence, l'ordre du polynôme de l'approximation rationnelle  $n$ , la valeur de l'argument du modèle du procédé pour la fréquence de coupure  $\varphi(j\omega_c)$ . Les étapes de l'algorithme sont données par les relations (4.19.1) – (4.19.5), afin d'obtenir l'expression du filtre non entier (4.19.6). Les paramètres dans la synthèse sont :  $\tau_F$  - constante de temps du filtre,  $\zeta$  - ordre non entier de synthèse du filtre,  $N$  - nombre de cellules d'approximation récursive,  $\lambda$  et  $\eta$  - facteur de l'approximation récursive.

$$\zeta \equiv \left( \frac{-\arg(G_{rat}(j\omega_c))}{\pi/2} \right), \tau_F = \tau^* \quad (4.19.1)$$

$$\zeta = \frac{\log \lambda}{\log \lambda \eta} \Rightarrow N = 5 \Rightarrow \lambda \eta = 3,58, \quad (4.19.2)$$

$$\omega_u = C \omega_c, C = const(1000 \div 2000) \quad (4.19.3)$$

$$\omega_A = 0.1 \omega_u, \omega_B = 10 \omega_u; \omega_b = 0.2 \omega_A = 0.02 \omega_u, \omega_h = 1.2 \omega_B = 12 \omega_u \quad (4.19.4)$$

$$\omega_1' = \lambda^{-0.3} \omega_u; \omega_1 = \lambda^{0.3} \omega_u; \omega_N = \eta^{-0.3} \omega_h = \eta^{-0.3} 12 \omega_u \quad (4.19.5)$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = D^\zeta \hat{=} D_{app}^\zeta \equiv \frac{(1+j\omega)}{(1+j\omega\tau^*)} \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\zeta \prod_{i=1}^N \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_i} \right) \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_i} \right)^{-1} \quad (4.19.6)$$

## IV.2. Application des commandes non-entières

### IV.2.1. Obtention de l'algorithme du régulateur $R_{NE}$ pour le système de commande CRONE

La présente section a pour but l'obtention : d'un algorithme de commande CRONE avec prédicteur de Smith (Fig.4.1) et d'un algorithme de commande CRONE avec prédicteur de Smith et un filtre de compensation (DTC) (Fig.4.5.a). Le deuxième algorithme est une amélioration du premier. Cependant, dans les deux cas de structures, l'algorithme d'approximation utilise la méthode polynomiale récursive. Cet algorithme nous aidera à éliminer les influences sur les variations des paramètres du retard (Fig.4.7).

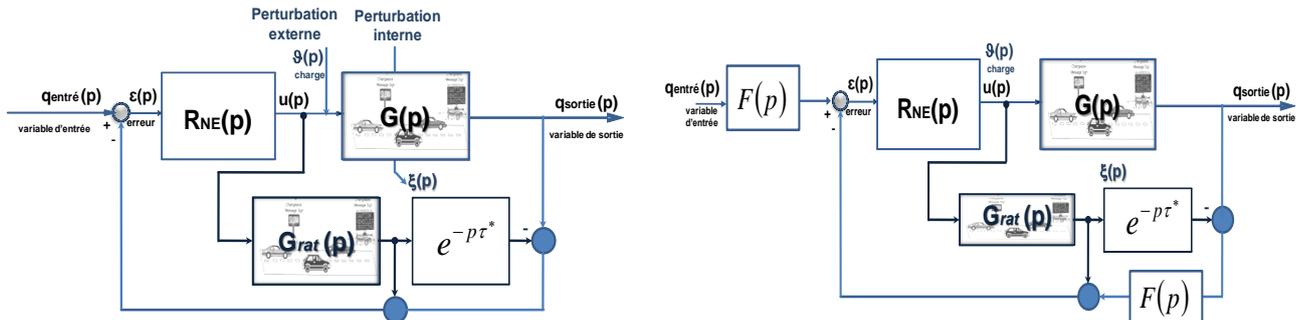


Fig.4.7. Système de commande pour le flux de trafic routier : avec prédicteur de Smith non entier (gauche) et avec prédicteur de Smith et filtres non entiers (droite)

Pour l'exemple de simulation nous nous basons sur l'algorithme présenté dans la section précédente. Nous avons les propriétés du modèle et le nombre de cellules de l'approximation polynomiale récursive. Pour le modèle du système de flux de trafic (2.30), les paramètres nominaux sont présentés dans le Tableau.2.1. La synthèse du modèle du régulateur est présentée respectivement dans le Tableau.4.1, le Tableau.4.2. et le Tableau.4.3 pour la partie différentiateur et dans le Tableau.4.4, le Tableau.4.5 et le Tableau.4.6 pour la partie intégrateur.

$$R_{(ID)_{app}} = k \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^{\alpha_e} \left[ \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega_{li})^{-1})(1 + j\omega(\omega_0)^{-1})}{(1 + j\omega(\omega'_{li})^{-1})(j\omega(\omega_0)^{-1})} + \prod_{i=1}^N \frac{(1 + j\omega(\omega'_{Di})^{-1})}{(1 + j\omega(\omega_{Di})^{-1})} \right] \quad (4.20)$$

Tableau.4.1

Differentiateur non entier				
N=5	5	Nombre de cellules de l'approximation [-]		
n=	3	Orde du polynôme de la F.T. du procédé [-]		
wc=	0,9	Fréquence de coupure [rad/s]		
Co	0,005			
wu =	900	250 * wc		Paramètres liés au gabarit fréquentiel de l'approximation, définissant les limites de la fréquence haute et basse du différentiateur
wA =	990	wu * 1,1		
wB =	9000	wu * 10		
wb =	198	wA / 5		
wh =	10800	wB * 1,2		
(wh/wb)	54,54545455	600		
(wu/wh) ^ 2	0,006944444			
(wu/wb) ^ 2	20,66115702			
Go*=	0,100113558			
Fm	50	Facteur de raisonnement		
Q	1,66			
n'	1,5			
m'	1,5			
m n'	0,5			Paramètres liés à l'orde non-entier du différentiateur
me'	1			
α	3,595528544			
η	0,618855097			
αη	2,225111166	3,58		
η1/2	0,786673437			

Le résultat de la synthèse fréquentielle induit le rapport fréquentiel du différentiateur

(Tableau.4.2) et (Tableau.4.3). L'expression analytique de la partie différentiateur récursive est représentée par la relation (4.21).

Tableau.4.2

$(w_u/w_{1'})^2$	33,3860982	$w_{1'}$	15576,13406	$(w_{1'})^{-1}$	6,4201E-05
$(w_u/w_1)^2$	2,58249913	$w_1$	56004,43461	$(w_1)^{-1}$	1,7856E-05
$(w_u/w_{2'})^2$	6,74314099	$w_{2'}$	34658,62981	$(w_{2'})^{-1}$	2,8853E-05
$(w_u/w_2)^2$	0,52159901	$w_2$	124616,0928	$(w_2)^{-1}$	8,0246E-06
$(w_u/w_{3'})^2$	1,36194263	$w_{3'}$	77119,30418	$(w_{3'})^{-1}$	1,2967E-05
$(w_u/w_3)^2$	0,10534971	$w_3$	277284,6595	$(w_3)^{-1}$	3,6064E-06
$(w_u/w_{4'})^2$	0,2750777	$w_{4'}$	171599,0248	$(w_{4'})^{-1}$	5,8275E-06
$(w_u/w_4)^2$	0,02127796	$w_4$	616989,1919	$(w_4)^{-1}$	1,6208E-06
$(w_u/w_{5'})^2$	0,05555869	$w_{5'}$	381826,9062	$(w_{5'})^{-1}$	2,619E-06
$(w_u/w_5)^2$	0,0042976	$w_5$	1372869,54	$(w_5)^{-1}$	7,284E-07

Tableau.4.3

* i *	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$(w_{i'})^{-1}$	6,4201E-05	2,8853E-05	1,2967E-05	5,8275E-06	2,619E-06
$(w_1)^{-1}$	1,7856E-05	8,0246E-06	3,6064E-06	1,6208E-06	7,284E-07

$$R_{(1D)D_{app}} = \left( \frac{0.0000092593p+1}{0.00555556p+1} \right) \left( \frac{0.000064201p+1}{0.000017856p+1} \frac{0.000028853p+1}{0.0000080246p+1} \cdot \right. \\ \left. \frac{0.000012967p+1}{0.0000036064p+1} \frac{0.0000058275p+1}{0.0000016208p+1} \frac{0.000002619p+1}{0.0000007284p+1} \right) \quad (4.21)$$

Tableau.4.4

Intégrateur non entier				
N=5	5	Nombre de cellules de l'approximation [-]		
n=	3	Orde du polynôme de la F.T. du procédé [-]		
wc=	3	Fréquence de coupure [rad/s]		
Co	0,005			
wu =	3000	250 * wc	Paramètres liés au gabarit fréquentiel de l'approximation, définissant les limites de la fréquence haute et basse de l'intégrateur	
wA =	300	wu / 10		
wB =	2700	wu * 0.9		
wb =	60	wA / 5		
wh =	3240	wB * 1,2		
(wh/wb)	54	600		
(wu/wh) ^ 2	0,85733882			
(wu/wb) ^ 2	2500			
Go* =	0,004498659			
Fm	50	Facteur de raisonnement		
Q	1,66			
n'	1,5			
m'	1,5			
m n'	0,5		Paramètres liés à l'orde non-entier du différentiateur	
me'	1			
α	3,583983513			
η	0,619601911			
αη	2,220643035	3,58		
η1/2	0,78714796			

Le rapport fréquentiel de l'intégrateur est présenté par les Tableau.4.5 et Tableau.4.6. L'expression analytique de la partie différentiateur récursive est représentée par la relation (4.22).

Tableau.4.5

$(w_u/w1')^2$	32,6822749	w1'	5247,653069		$(w1')^{-1}$	0,00019056
$(w_u/w1)^2$	2,54437004	w1	18807,50208		$(w1)^{-1}$	5,317E-05
$(w_u/w2')^2$	6,62757689	w2'	11653,16424		$(w2')^{-1}$	8,5814E-05
$(w_u/w2)^2$	0,515968	w2	41764,7485		$(w2)^{-1}$	2,3944E-05
$(w_u/w3')^2$	1,34399382	w3'	25877,518		$(w3')^{-1}$	3,8644E-05
$(w_u/w3)^2$	0,10463218	w3	92744,59785		$(w3)^{-1}$	1,0782E-05
$(w_u/w4')^2$	0,27254597	w4'	57464,7301		$(w4')^{-1}$	1,7402E-05
$(w_u/w4)^2$	0,02121816	w4	205952,6452		$(w4)^{-1}$	4,8555E-06
$(w_u/w5')^2$	0,05526908	w5'	127608,6526		$(w5')^{-1}$	7,8365E-06
$(w_u/w5)^2$	0,00430279	w5	457347,3072		$(w5)^{-1}$	2,1865E-06

Tableau.4.6

* i *	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$(w i')^{-1}$	0,00019056	8,5814E-05	3,8644E-05	1,7402E-05	7,8365E-06
$(w 1)^{-1}$	5,317E-05	2,3944E-05	1,0782E-05	4,8555E-06	2,1865E-06

$$R_{(1D)I_{app}} = \left( \frac{0.01666667p+1}{0.0000277778p+1} \right) \left( \frac{0.00019056p+1}{0.00005317p+1} \frac{0.000085814p+1}{0.000023944p+1} \frac{0.000038644p+1}{0.000010782p+1} \right) \left( \frac{0.0000017402p+1}{0.0000048555p+1} \frac{0.0000078365p+1}{0.0000021865p+1} \right) \left( \frac{2p+1}{2p} \right) \quad (4.22)$$

#### IV.2.2. Obtention de l'algorithme du filtre pour le système de commande d'ordre non entier

Pour réaliser la synthèse du filtre avec son algorithme d'ordre non entier (4.23), nous utilisons de la même façon que précédemment l'approximation polynomiale récursive pour obtenir les zéros et les pôles du polynôme.

$$F(j\omega) = F_\tau D^\zeta \cong F_\tau D_{app}^\zeta \equiv \frac{(1+j\omega)}{(1+j\omega\tau_F)} \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\zeta \prod_{i=1}^N \left( 1+j\frac{\omega}{\omega_i} \right) \left( 1+j\frac{\omega}{\omega_i} \right)^{-1} \quad (4.23)$$

A partir des résultats obtenus dans le Chapitre.II pour le modèle de référence  $G^*(p)$  (2.30) (Tableau.2.1), nous pouvons réaliser la synthèse du filtre en utilisant les paramètres :  $\tau^*=\tau_F=0.0069444$  [s],  $\omega_c=0.6$  [rad/s],  $N=5$ . Les résultats sont présentés dans Tableau.4.7, Tableau.4.8 et Tableau.4.9. Le rapport polynomial du filtre est représenté par la relation 4.24.

Tableau.4.7

Filtre non entier - différentiateur				
	N=5	5	Nombre de cellules de l'approximation [-]	
	n=	3	Ordre du polynôme de la F.T. du procédé [-]	
	wc=	0,6	Fréquence de coupure [rad/s]	
	Co	0,005		
1000*wc < wu < 2000*wc	wu = 1500wc	900	Paramètres liés au gabarit fréquentiel de l'approximation, définissant les limites de la fréquence haute et basse du filtre-différentiateur	
	wA =	90		wu * 1.1
	wB =	9000		wu * 10
wb^1 =	wb =	18		wA / 5
wh^1 =	wh =	10800		wB * 1,2
	(wh/wb)	600		600
	(wu/wh) ^ 2	0,006944444		
	(wu/wb) ^ 2	2500		
	Go*=	0,288521246		
	Fm	50		Facteur de raisonnance
	Q	1,66	Paramètres liés à l'ordre non-entier du différentiateur	
	n'	2,682		
	ζ	0,318		
	m n'	-0,682		
	me'	1		
	λ	1,707078311		
	η	2,105604526		
	λη	3,594431819	3,58	
	η1/2	1,451070131		

Tableau.4.8

(wu/w1) ^ 2	1187,30748	w1'	26,11926237	(w1')^-1	0,03828592
(wu/w1) ^ 2	407,433105	w1	44,58762629	(w1)^-1	0,02242775
(wu/w2) ^ 2	91,8972897	w2'	93,88390773	(w2')^-1	0,01065145
(wu/w2) ^ 2	31,5352163	w2	160,2671826	(w2)^-1	0,00623958
(wu/w3) ^ 2	7,1128263	w3'	337,4593052	(w3')^-1	0,00296332
(wu/w3) ^ 2	2,44081753	w3	576,0694608	(w3)^-1	0,0017359
(wu/w4) ^ 2	0,5505309	w4'	1212,974464	(w4')^-1	0,00082442
(wu/w4) ^ 2	0,18891864	w4	2070,6424	(w4)^-1	0,00048294
(wu/w5) ^ 2	0,04261095	w5'	4359,954009	(w5')^-1	0,00022936
(wu/w5) ^ 2	0,01462225	w5	7442,782927	(w5)^-1	0,00013436

Tableau.4.9

* i *	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
(w i ' ) ^ -1	0,03828592	0,01065145	0,00296332	0,00082442	0,00022936
(w 1 ) ^ -1	0,02242775	0,00623958	0,0017359	0,00048294	0,00013436

$$F_{D \text{ app}} = \left( \frac{0.03828592 p + 1}{0.02242775 p + 1} \right) \left( \frac{0.01065145 p + 1}{0.00623958 p + 1} \frac{0.00296332 p + 1}{0.0017359 p + 1} \cdot \frac{0.00082442 p + 1}{0.00048294 p + 1} \frac{0.00022936 p + 1}{0.00013436 p + 1} \right) \quad (4.24)$$

Pour les différents types d'algorithme de régulateurs non entier obtenus, nous proposons ci-après une comparaison des résultats des simulations. Les résultats sont présentés sur la Fig.4.8. Ils montrent les propriétés et l'efficacité des trois types de régulateurs – non entier, non entier avec prédicteur de Smith et non entier avec prédicteur de Smith et compensation du retard (DTC).

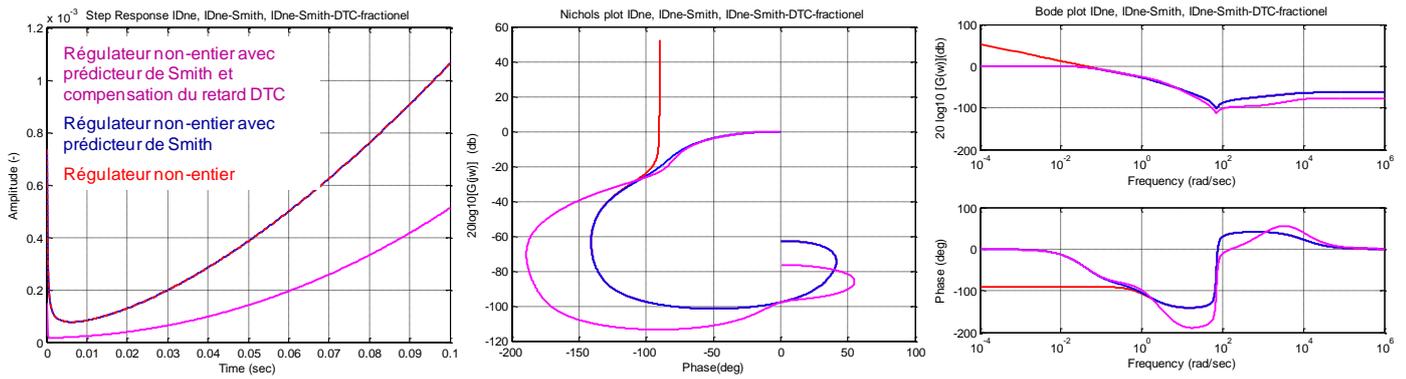


Fig.4.8. Propriétés du régulateur non entier, non entier avec prédicteur de Smith et non entier avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC

### IV.3. Schémas technologiques

Nous allons décrire ci-après les deux systèmes physiques sur lesquels ont porté notre étude constitués de segments routiers situés en aval d'un péage. Il s'agit d'un segment routier simple et d'un segment routier avec une rampe d'entrée. Dans la section suivante nous allons présenter en détail les structures et les études effectuées.

#### IV.3.1 Pour la commande d'un segment simple

Le segment routier simple étudié a une longueur de 6 km. La densité est mesurée tous les kilomètres après le péage routier. En chaque point de mesure nous avons considéré que la vitesse libre change selon les paramètres donnés dans le Tableau.2.2. La représentation physique du système de flux de trafic est celle de la Fig.4.9.a. Nous pouvons constater que nous avons une excitation externe et une contrainte dans la commande. En d'autres termes, nous avons une variation de la densité d'entrée et une consigne de densité.

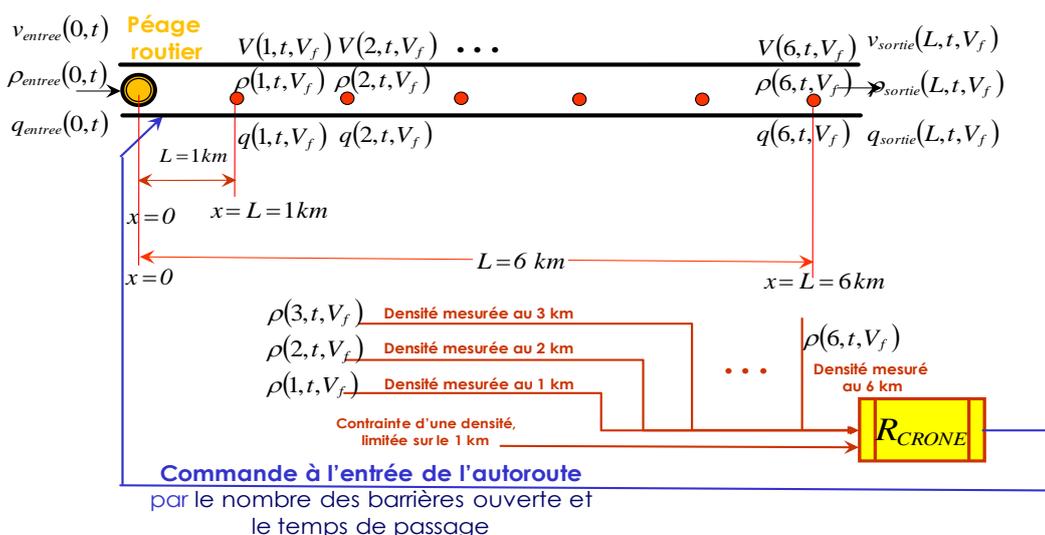


Fig.4.9.a. Représentation physique d'un système simple – segment routier simple

### IV.3.2 Pour la commande d'un segment composé – système en cascade

Dans le cas d'un réseau routier, où nous avons des changements dans la structure routière, il est nécessaire de construire un système en cascade. En partant des deux structures décrites précédemment (Fig.4.8) nous proposons un schéma technologique pour ce système en cascade (Fig.4.9.b). La mesure de la densité est effectuée en deux points sur l'autoroute – au premier kilomètre et au sixième kilomètre après le péage (Fig.4.9.b). Une rampe d'entrée est située entre les deux points de mesure. Dans ce schéma technologique, nous considérons un segment composé (Fig.4.9.b) avec une consigne constante sur la voie principale et une charge d'entrée entre les deux points de mesure.

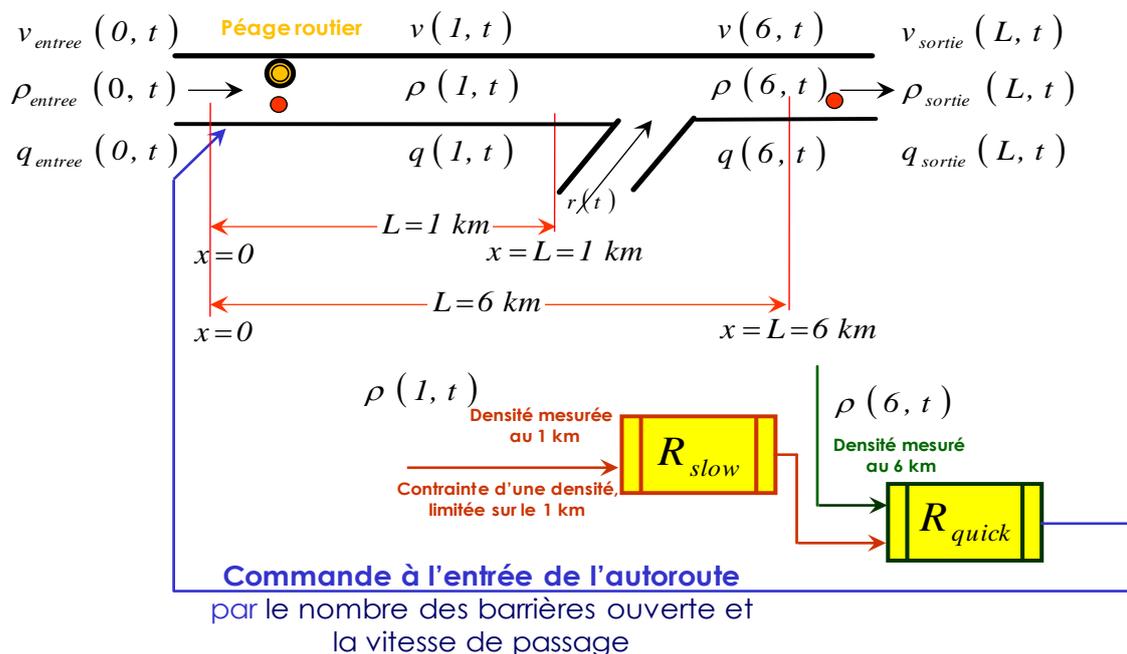


Fig.4.9.b. Représentation physique d'un système en cascade – segment routier avec une rampe d'entrée

### IV.4. Résultats des simulations

Pour les deux schémas technologiques présentés par les figures (Fig.4.9.a) et (Fig.4.9.b) nous avons repris les deux possibilités de conception de régulateur : d'une commande CRONE avec prédicteur de Smith et d'une commande CRONE avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation (DTC). Pour les deux types de structure routière nous réalisons l'étude en simulation de la stabilité et des performances à partir d'une analyse temporelle, la reconstitution du diagramme fondamental et une analyse harmonique.

Pour les deux systèmes de commande, nous avons effectué les analyses en considérant deux cas de perturbations externes :

- une excitation d'entrée sur la voie principale – qui correspond à un signal à l'entrée du système ;
- une rampe d'entrée – qui correspond à un signal, ajouté comme une charge

Les différentes analyses réalisées sont :

- l'étude de la stabilité qui permet de savoir à quel point le système répond à la contrainte imposée. Conclure qu'un trafic est fluide impose que le processus soit stable et avec la contrainte  $\rho_s \leq (0.35 \rho_{max})/L$  satisfaite.
- l'étude des marges de stabilité afin de prouver que le système répond aux critères d'invariance par rapport aux perturbations (excitation ou charge) dans le système et satisfait le critère d'un gabarit généralisé
- l'étude de la stabilité robuste et des performances robustes qui permet de justifier de la démarche de mise en œuvre d'une commande CRONE

#### IV.4.1. Analyse d'un segment simple avec perturbations externes :

Le premier cas de mesure (Fig.4.10) est effectué en six points (de 1<sup>er</sup> au 6<sup>ème</sup> kilomètre).

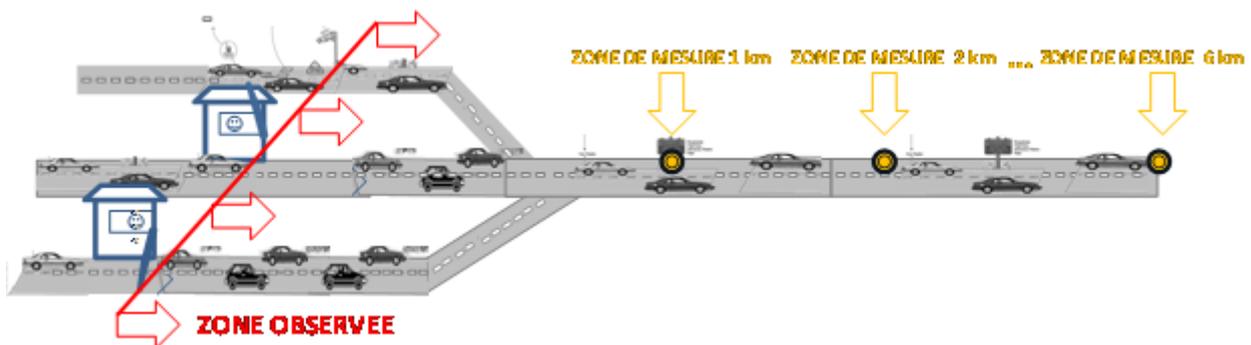


Fig.4.10. Etude d'un modèle d'un segment simple

Un signal de consigne est ajouté à l'entrée du système. Il représente une forte augmentation de la demande qui se traduit par une augmentation très significative de la densité provenant du péage. Cela se traduit par une augmentation importante du nombre de véhicules provenant du péage pendant une certaine période de temps. L'étude a consisté en une vérification de l'efficacité des deux types de commandes proposées.

##### IV.4.1.1. Système de commande CRONE avec prédicteur de Smith

###### - Analyse temporelle

Dans le cas du modèle étudié (Fig.4.10) les réponses temporelles sont représentées sur la Fig.4.11.a. Dans les schémas structurels des systèmes de commande non entière nous avons utilisé : une contrainte de densité de sortie qui ne dépasse pas 35% de la valeur maximale par kilomètre. Le résultat est montré Fig.4.11.a. Pour tous les modèles (correspondant aux différentes situations de circulation) obtenus nous avons réalisé les simulations selon les mêmes conditions initiales et les mêmes contraintes. Nous pouvons constater une diminution de la densité à chaque kilomètre de mesure selon la contrainte  $\rho_s \leq (0.35 \rho_{max})/L$ .

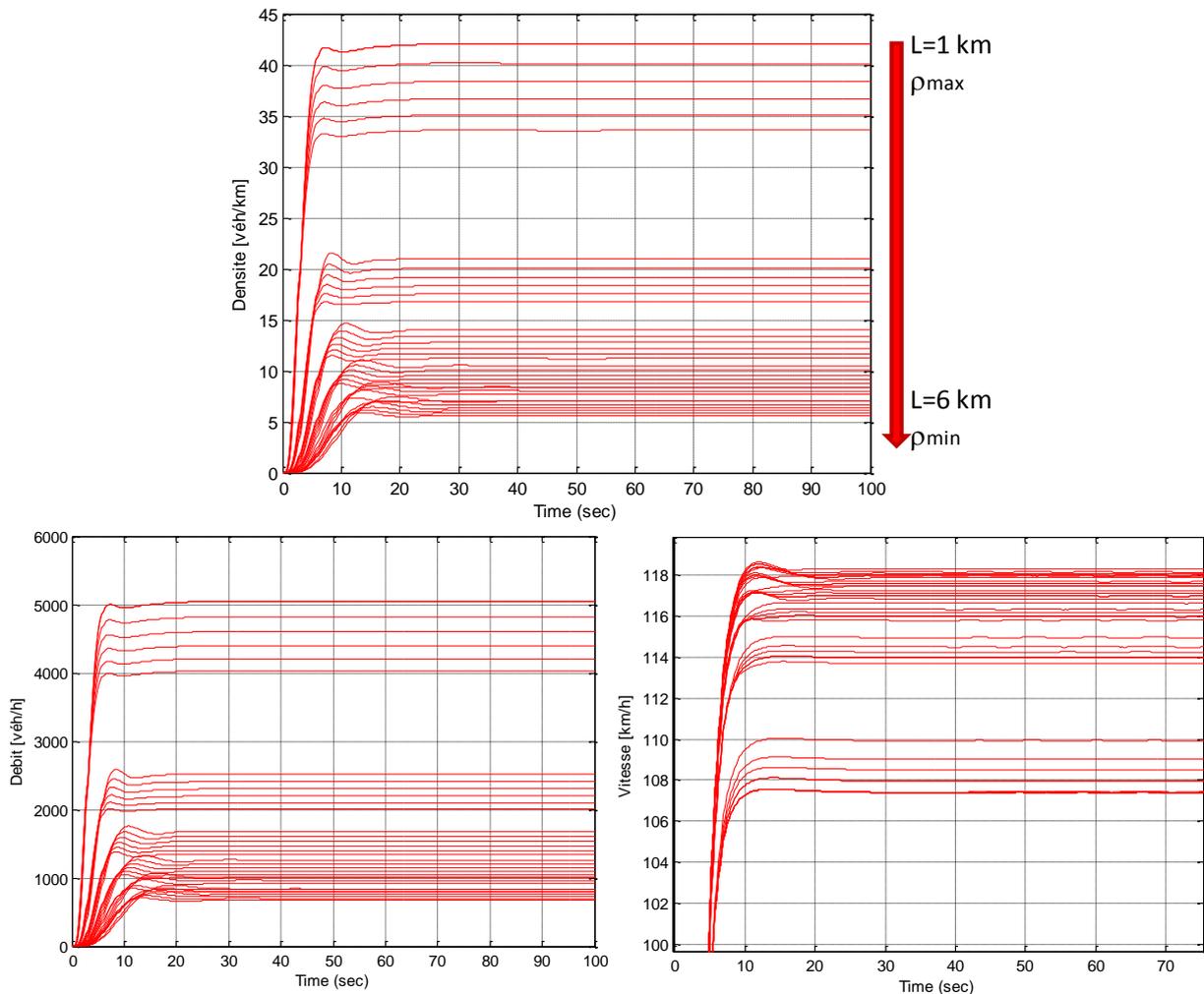


Fig.4.11.a. Etude temporelle d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith pour un segment simple

Les résultats graphiques montrent que pour les valeurs de la densité au-dessous de  $\rho_s \leq (0.35\rho_{max})/L$ , le régulateur n'agit pas sur le système. A partir du moment où les valeurs de densité sont plus importante, le trafic sans commande (Fig.2.24.a) est en dehors de l'état contraint jusqu'au moment où la demande sur la voie diminue. Le système revient alors dans son état fluide (Chapitre II). Dès que  $\rho_s \geq (0.35\rho_{max})/L$ . Le régulateur commence à agir lorsque la densité de sortie a tendance à dépasser la valeur de consigne. Son action tend à maintenir la densité à une valeur inférieure ou égale à  $(0.35\rho_{max})/L$ . Le but de la commande est de tenir la densité à la valeur de consigne et on observe que dans le cas observé le trafic ne dépasse pas la valeur de la contrainte. A partir des résultats graphiques (Fig.4.24.a et b) nous pouvons conclure, que le système sans commande se stabilise, d'une manière naturelle après 80 secondes. Avec une commande (Fig.4.11.a) nous avons diminué quatre fois ce temps.

Dans le Chapitre.II nous avons validé le modèle de simulation en reconstituant le diagramme fondamental. Pour valider le système de commande et vérifier qu'il est conforme au modèle physique nous allons à nouveau reconstituer le diagramme fondamental (Fig.4.11.b).

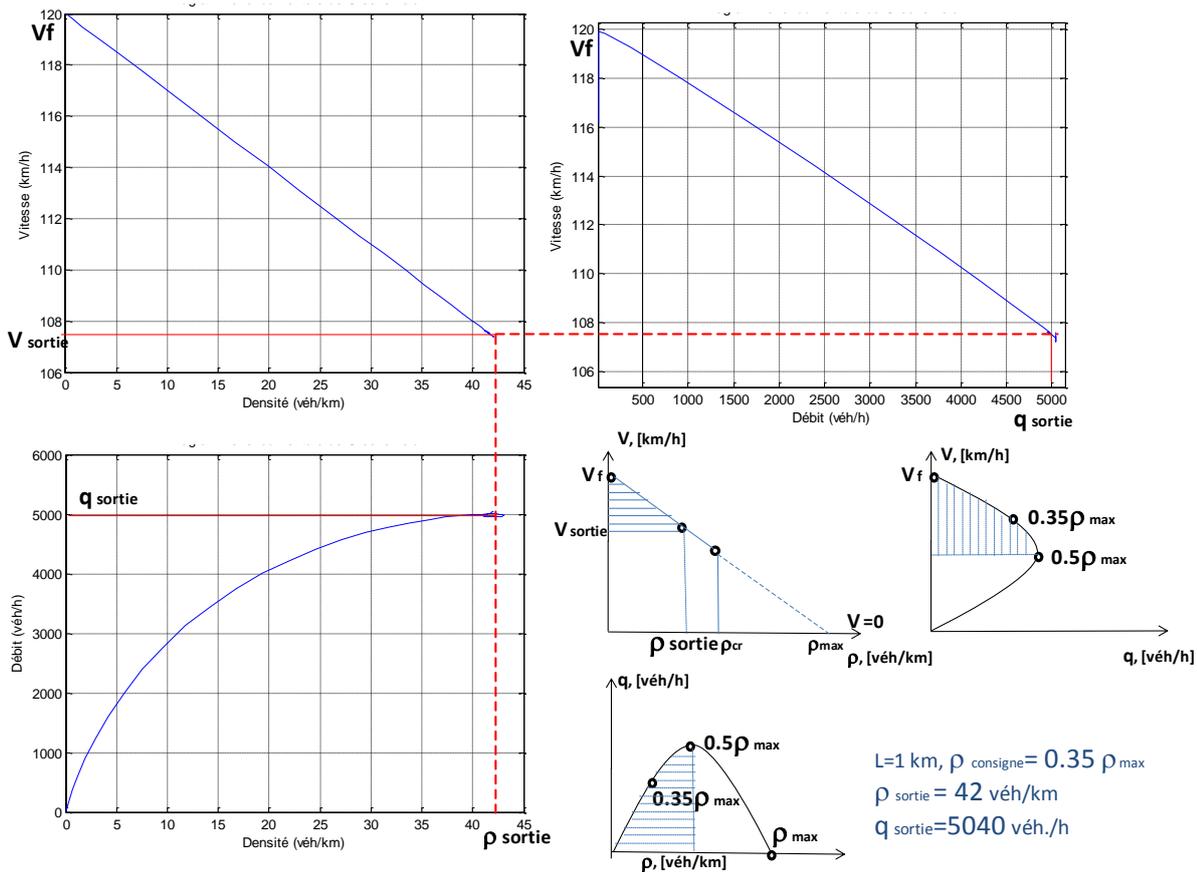
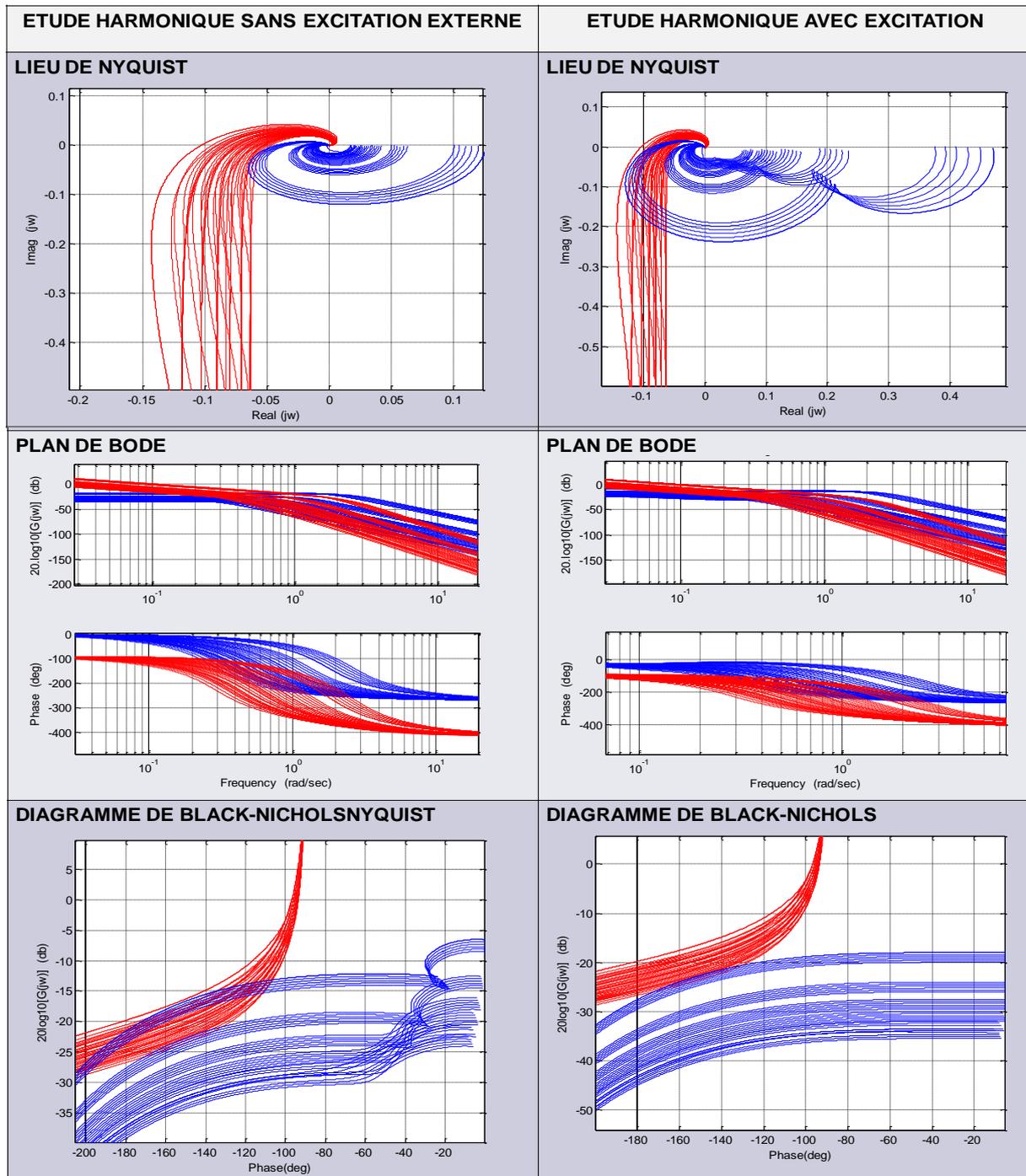


Fig.4.11.b. Diagramme fondamental reconstruit à la base du D.F. de Greenshield débit/densité pour le système de commande – mesuré au premier km pour le modèle de référence

Le D.F. ainsi reconstruit (Fig.4.11.b.) est relatif au modèle de référence, là où densité est plus importante, c'est à dire au premier kilomètre. En comparant ce diagramme fondamental avec celui que nous avons reconstitué pour le modèle (Fig.2.12.a) et (Fig.2.17.a, b et c) nous pouvons constater que pour le système de commande le diagramme fondamental ne suit pas la variation du flux, mais plutôt la contrainte de commande. Le D.F. s'arrête à la valeur de la consigne de densité du segment routier en aval. Pour le modèle de référence nous retrouvons les diagrammes fondamentaux introduit dans le modèle du trafic (Fig.4.11.b).

### Analyse harmonique

Les résultats des réponses harmoniques sont présentés sur la Fig.4.12. Cette étude nous donne la possibilité d'obtenir les valeurs des marges de stabilités et de conclure sur la stabilité et les performances du système. On effectue deux études dans le cas sans une excitation externe et dans le cas ou nous avons une excitation externe.



*Fig.4.12. Etude harmonique d'un segment simple – étude comparatif entre le modèle du trafic sans commande et le système de commande CRONE avec prédicteur de Smith*

Cet exemple, dans le cas où sur le système nous avons une excitation externe, comme c'est dans le cas des processus de trafic routier, est très utile pour prouver le besoin d'un système de commande CRONE à cause du fait que le système garde ses marges de stabilisées et ses performances dans la présence de perturbations. Dans le cas du trafic, une très forte demande en amont des barrières de péage se présente comme une perturbation et le trafic peut devenir très rapidement congestionné. Les caractéristiques harmoniques dans le plan de Nyquist dans le cas de présence d'une excitation externe sont bien plus élargies par rapport aux celles sans

excitation. Ceci est conditionné par la présence d'une forte densité. Par contre les caractéristiques obtenues pour le système de commande CRONE avec une prédiction de Smith restent sans aucune influence par rapport aux excitations externes. Les résultats, pour le système de commande CRONE avec une prédiction de Smith, montrent que pour n'importe quelle excitation le système va limiter la densité en aval à celle de la consigne. Pour n'importe quel type de perturbation le système restera stable et conservera ses marges de stabilité et de performances. En autres termes, il devient insensible aux perturbations et les conditions de robustesse seront toujours satisfaites

#### - Analyse de Nyquist – stabilité robuste

Le système étudié sera stable selon Nyquist à la condition de vérifier sa stabilité pour l'ensemble du champ de variation de la vitesse. Chaque circonférence du Lieu de Nyquist représente un ensemble de variation des vitesses du modèle de référence mesuré pour une valeur de la fréquence. Le résultat graphique de l'analyse de Nyquist pour le système de commande CRONE avec un prédicteur de Smith est représenté sur la Fig.4.13.

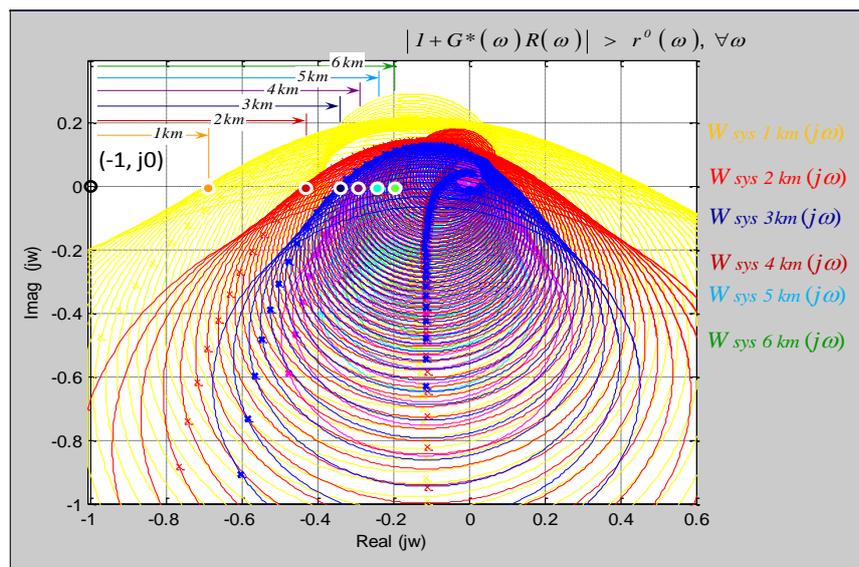


Fig.4.13. Analyse de Nyquist de la robustesse du système de commande CRONE avec un prédicteur de Smith en B.O. – mesures effectués en six points sur la longueur du segment routier

Dans le cas de présence de perturbations trop importantes, le lieu de Nyquist se rapproche de sa limite de stabilité. Cependant la commande maintient les systèmes dans la zone de stabilité. Le système qui se rapproche le plus du point de Nyquist est celui mesuré au premier kilomètre. Le long de ce segment on obtient une diminution de la densité selon la contrainte  $\rho_s \leq (0.35\rho_{max})/L$ .

#### - Analyse robuste

Les conditions de performances (4.25) et de stabilité (4.26) robustes ont été présentées

(Chapitre.III) [Oustaloup (1999)], [Nikolov (2003)] et [Canat (2005)]. Elles permettent d'assurer le bon déroulement du processus sur les voies rapides. Nous utilisons deux fonctions pour l'analyse et la synthèse robuste du système – la fonction de sensibilité (analyse en B.F.)  $\eta(j\omega)$  (3.5.a) et celle de l'erreur  $e(j\omega)$  (3.5.b). Le résultat graphique de cette étude est présenté sur la Fig.4.14.a et la Fig.4.14.b. Pour que le système puisse satisfaire les deux conditions il faut que :

- pour toute fréquence nous ayons une valeur négative de l'erreur ;
- pour toute fréquence le module du système en boucle ouverte doit rester supérieur à la valeur de la perturbation.

$$\begin{cases} \frac{R(\omega)G^*(\omega)}{1+R(\omega)G^*(\omega)} = \eta^*(\omega) \Rightarrow \left| \frac{R(\omega)G^*(\omega)}{1+R(\omega)G^*(\omega)} \right| \overline{L}_m(\omega) < 1, \\ SR(\omega) = \frac{1}{|\eta^*(\omega)|} > \overline{L}_m(\omega), \quad \forall \omega \end{cases} \quad (4.25)$$

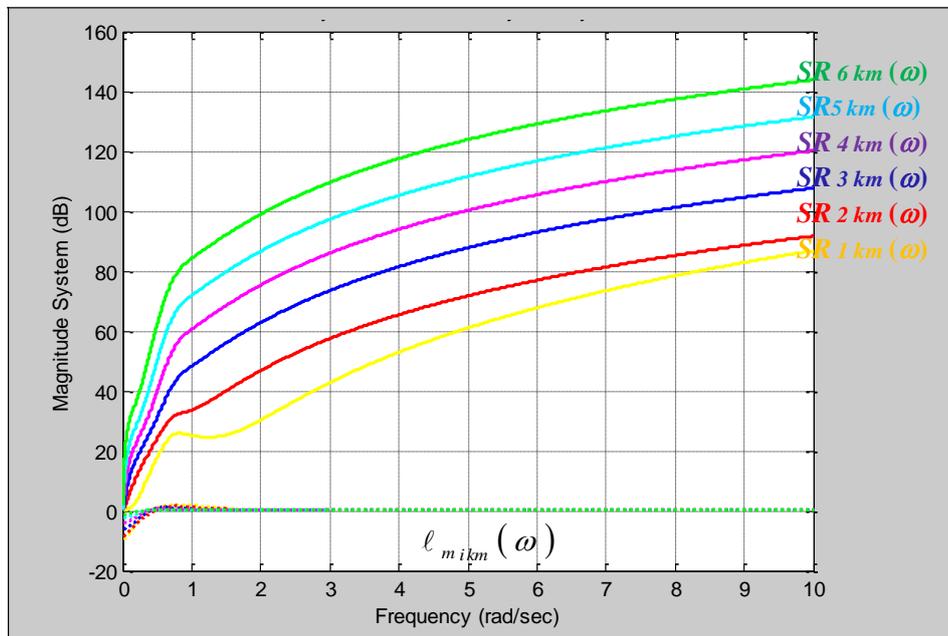


Fig.4.14.a. Analyse robuste du système en B.O. pour le système de commande CRONE avec prédicteur de Smith - stabilité robuste (SR)

$$\begin{cases} r^0(\omega) = |L_m(\omega)R(\omega)G^*(\omega)| \\ \text{stabilité robuste en B.O.:} \\ |1+R(\omega)G^*(\omega)| > \overline{L}_m(\omega)R(\omega)G^*(\omega) \\ \text{stabilité robuste en B.F.:} \\ SR(\omega) = \left\| \overline{L}_m(\omega)\eta^*(\omega) \right\|_\infty < 1, \\ \forall \omega, (\omega \in [0; \infty)) \end{cases} \begin{cases} \text{performance robuste du système en B.O.:} \\ PR(\omega) = |1+R(\omega)G(\omega)| \geq |1+R(\omega)G^*(\omega)| - r(\omega) \\ \forall G \in \prod, \forall \omega, (\omega \in [0; \infty)) \\ \text{performance robuste du système en B.F.:} \\ PR(\omega) = |\eta^*(\omega)\overline{L}_m(\omega)| + |e^*(\omega)v(\omega)| < 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

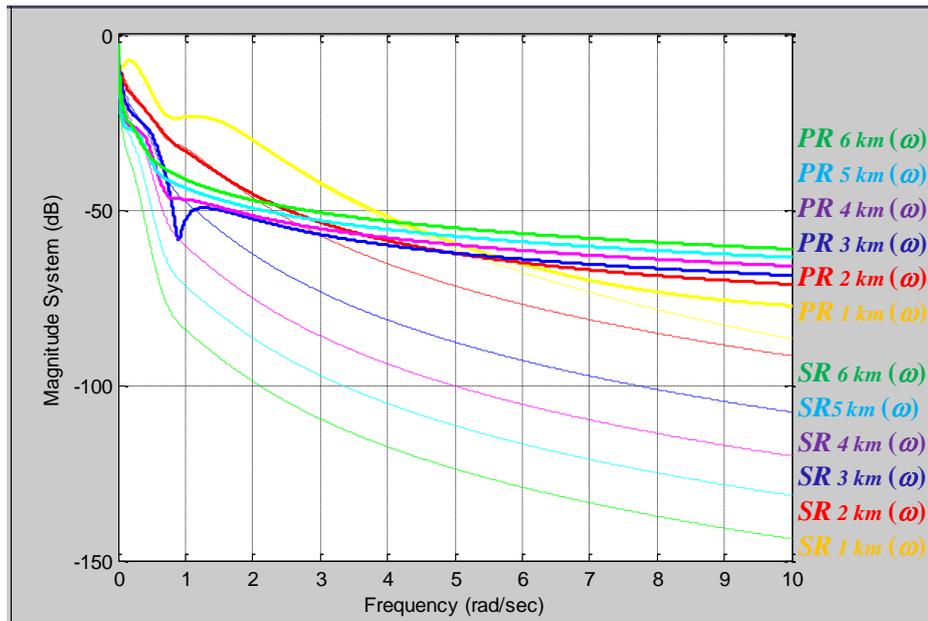


Fig.4.14.b. Analyse robuste du système en B.F. pour le système CRONE avec prédicteur de Smith - stabilité robuste (SR) et performance robuste (PR)

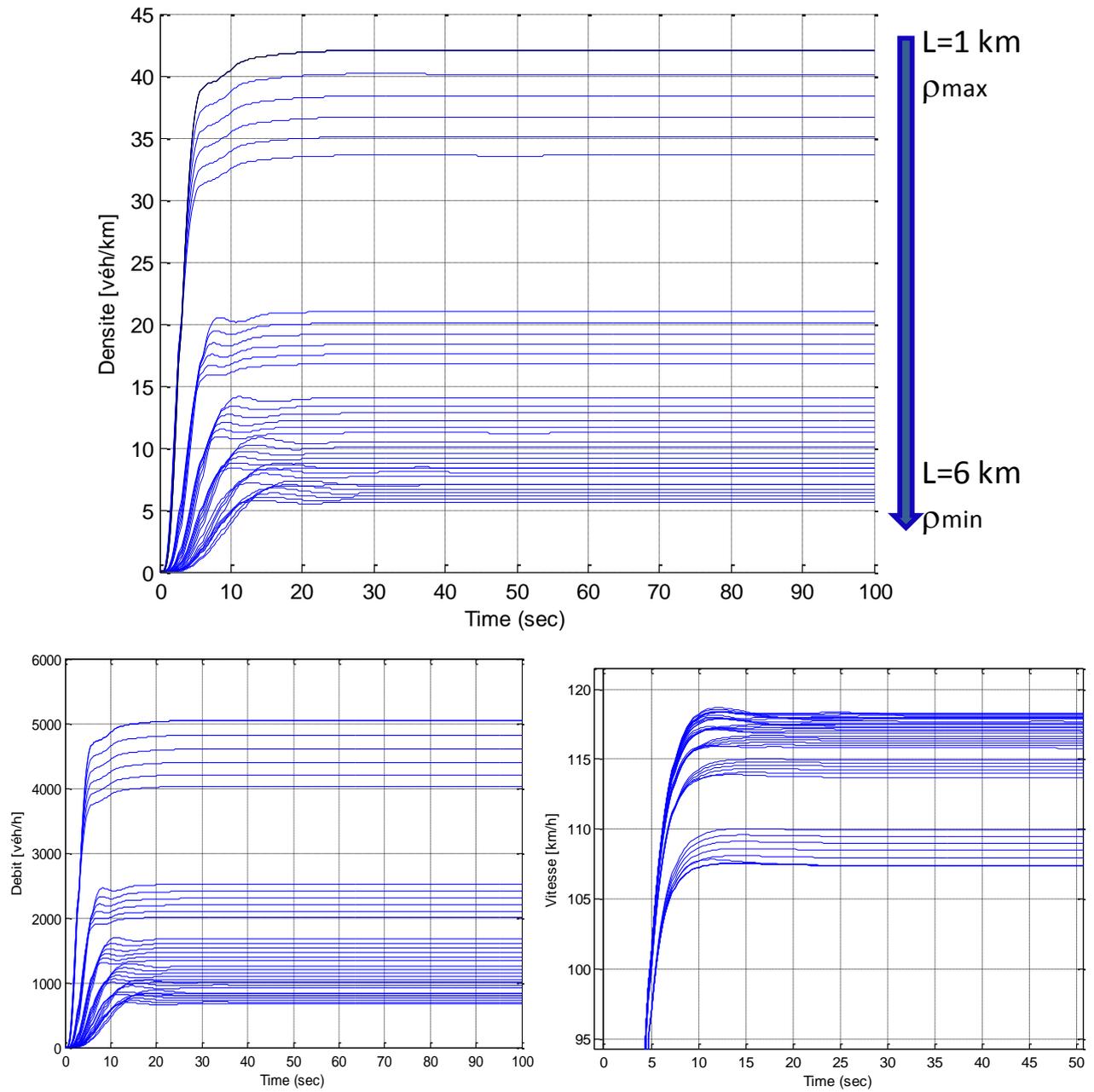
En observant les résultats graphiques (Fig.4.14.a) et (Fig.4.14.b) nous pouvons conclure, que pour n'importe quel type de perturbation, le système garde sa stabilité robuste ainsi que ses performances robustes et satisfait les conditions (4.25) et (4.26). Nous obtenons des valeurs de l'indice de la stabilité robuste plus grandes que la valeur de la perturbation dans le système en B.0. Ainsi, nous obtenons pour tout système des valeurs négatives de l'indice de performances robuste du système en B.F.

#### IV.4.1.2. Système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation DTC

La deuxième étude concerne la deuxième structure de commande proposée contenant un filtre de compensation DTC. Nous avons réalisé l'étude des réponses temporelle et harmonique du système de commande que nous avons comparé au système de trafic sans commande de façon à montrer l'effet du filtre DTC dans le système. Une vérification de la robustesse est ensuite réalisée à l'aide d'une analyse de Nyquist.

##### - Analyse temporelle

Les résultats de l'étude temporelle sont représentés sur la Fig.4.15.a. La reconstruction du diagramme fondamental (débit/densité, vitesse/densité et vitesse/débit) est présentée sur la Fig.4.15.b et l'étude de l'efficacité du contrôle sur la Fig.4.15.c.



*Fig.4.15.a. Etude temporelle du système de commande avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation - segment simple avec perturbations paramétriques, excitation externe et consigne*

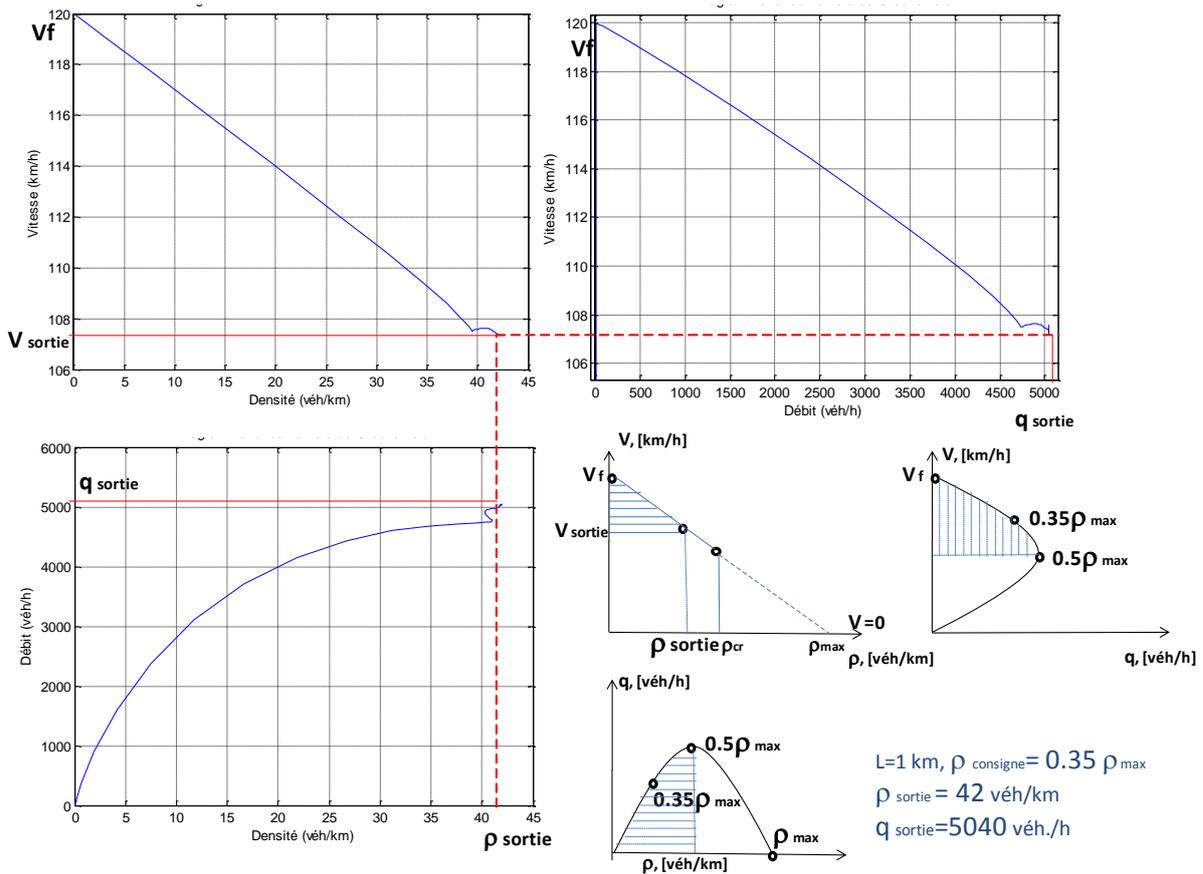


Fig.4.15.b. Diagramme fondamental reconstruit à la base de D.F. de Greenschild débit/densité) pour le système de commande – mesuré au premier km pour le modèle de référence

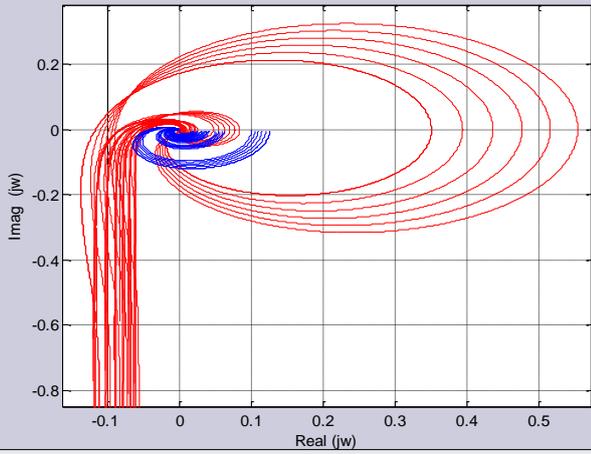
Les résultats temporels, pour ce type de système de commande montrent une similarité avec ceux obtenus dans le cas d'un système de commande sans filtre de compensation. Cependant le système avec filtre de compensation, améliore les résultats temporels ce qui peut être mieux observé dans l'analyse comparative des deux commandes présentée sur les Fig.4.18, Fig.4.19 et Fig.4.20.

#### - Analyse harmonique

Comme précédemment, nous avons effectué une analyse harmonique dans les deux cas d'analyse sans et avec une excitation externe pour le système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC. Les résultats sont présentés sur la Fig.4.16.

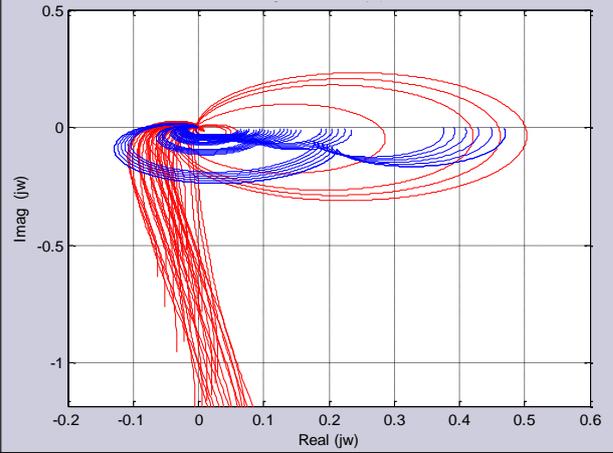
**ETUDE HARMONIQUE SANS EXCITATION EXTERNE**

**LIEU DE NYQUIST**

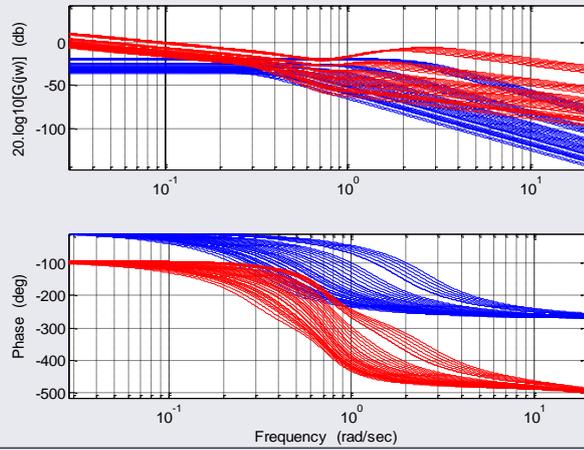


**ETUDE HARMONIQUE AVEC EXCITATION**

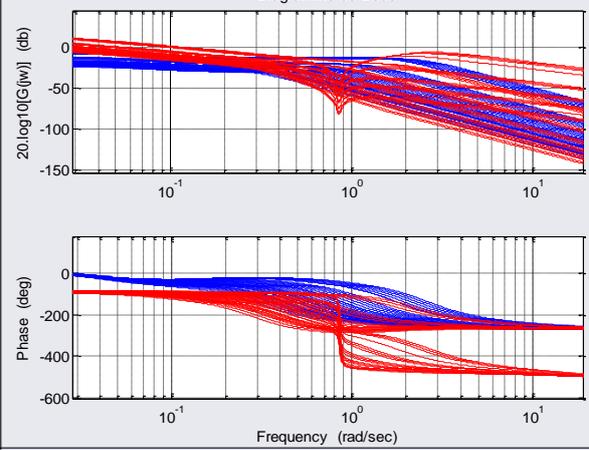
**LIEU DE NYQUIST**



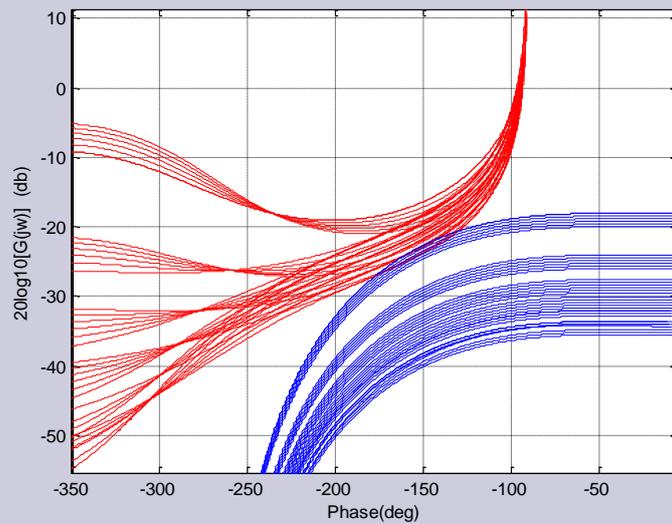
**PLAN DE BODE**

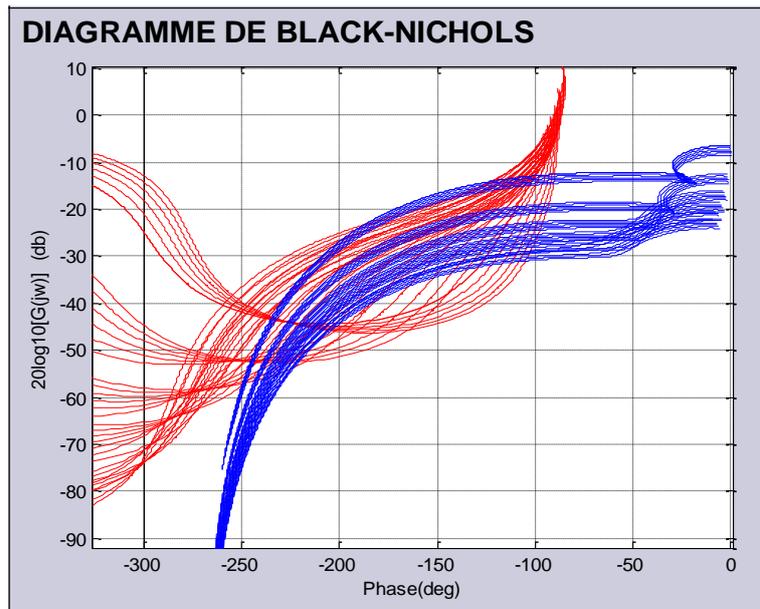


**PLAN DE BODE**



**DIAGRAMME DE BLACK-NICHOLSNYQUIST**





*Fig.4.16. Etude harmonique– comparaison entre le modèle de trafic sans commande et le système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC*

Les résultats montrés sur la Fig.4.16 nous permettent de conclure que les perturbations dans le cas d'une excitation externe tendent à rendre le trafic congestionné. Pour le système de commande avec une prédiction de Smith et un filtre DTC et dans le cas sans excitation, nous avons un système de commande qui satisfait une invariance des marges de stabilité et maintient les propriétés robustes attendues. L'efficacité du filtre est ainsi montrée lorsqu'une excitation ou n'importe quel type de perturbation est appliqué sur le système. Dans le cas où il y a présence de perturbations, nous pouvons observer que le modèle du trafic sans commande a des marges de stabilité qui diminuent très rapidement. Ceci se produit même pour de petites augmentations de la densité d'entrée, ce qui peut se traduire par l'apparition d'une congestion. Pour le cas de la mise en place d'une commande CRONE avec une prédiction de Smith et un filtre DTC, nous obtenons des résultats bien plus robustes et performants par rapport au système de commande sans filtre DTC. La comparaison des deux systèmes de commande est représentée (Fig.4.18) - (Fig.4.20).

#### - Analyse de Nyquist – stabilité robuste

Pour les six points de mesure nous avons effectué une analyse de Nyquist pour le système en boucle ouverte. Les résultats obtenus sont présentés sur la Fig.4.17.

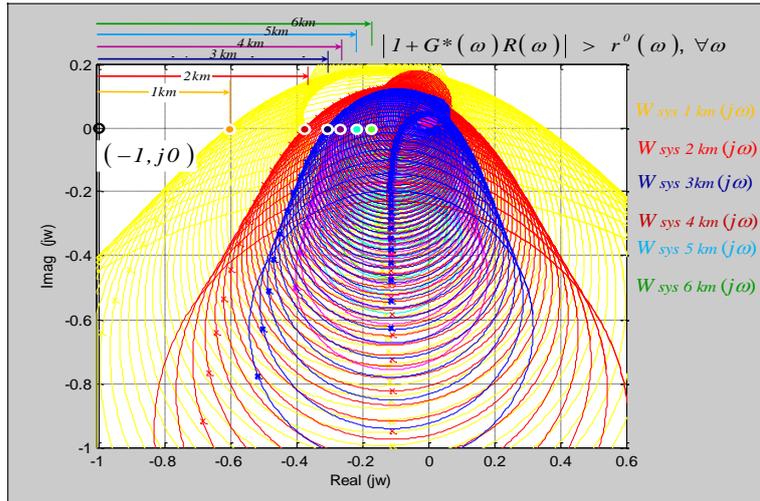


Fig.4.17. Analyse de Nyquist de la robustesse du système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et Filtre de compensation DTC en B.O. – mesure effectuée en six points

Les résultats (Fig.4.17) montrent une augmentation des marges de stabilité en module et en phase par rapport au système sans filtre de compensation (Fig.4.13), ce qui prouve l'utilité du filtre de compensation dans la boucle de correction proposée. A partir de la Fig.4.16 et de la Fig.4.17 nous pouvons définir facilement les valeurs des marges de gain et de phase pour chaque famille de modèles pour chaque point de mesure.

#### IV.4.1.3. Comparaison entre les deux commandes

Pour le modèle de référence les résultats des comparaisons pour la densité véhiculaire dans le cas d'un segment simple sont présentés sur la Fig.4.18. Sur la figure (Fig.4.18) sont représentées : la densité d'entrée (excitation), la densité de sortie du système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et la densité du système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC.

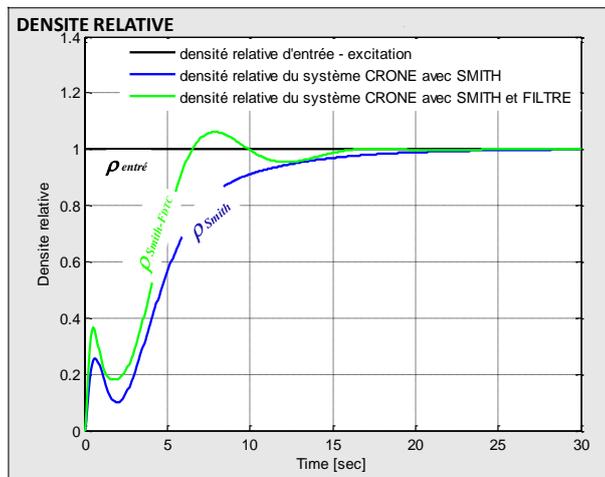


Fig.4.18. Etude de l'efficacité du contrôle pour le système de référence – comparaison entre les densités relatives : d'entrée et de sortie

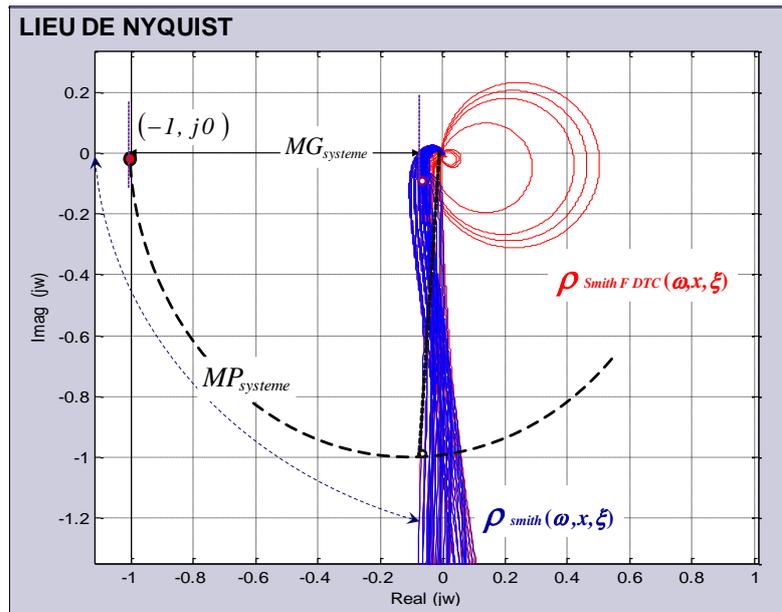


Fig.4.19. Etude de la stabilité par les réponses harmoniques des deux systèmes de commande – lieu de Nyquist

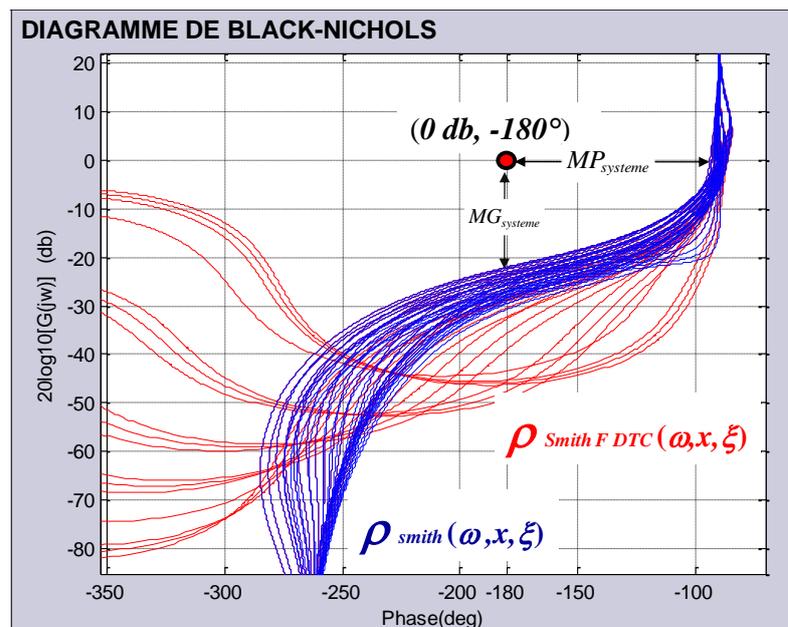


Fig.4.20. Etude de la stabilité par les réponses harmoniques des deux systèmes de commande – diagramme de Black-Nichols

La Fig.4.19 et Fig.4.20 montrent l'étude comparative harmonique réalisée. Celle-ci nous permet d'observer l'effet du filtre dans le système de commande. Le système avec filtre améliore la stabilité et assure de plus grandes marges de stabilité. Nous avons une invariance des marges de phase dans le gabarit voulu, ce qui veut dire que les deux systèmes satisfont les critères de conception de la commande et les conditions de robustesse.

#### IV.4.2. Analyse d'un segment composé avec perturbations externes - système en cascade de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC

Pour le deuxième cas, nous avons un segment avec une rampe d'entrée située après un péage. La rampe se comporte comme une charge entre deux points de mesure. Nous effectuons donc une mesure de part et d'autre de la rampe au 1<sup>er</sup> et au 6<sup>ème</sup> km (Fig.4.21). Dans ce cas, nous n'avons que deux modèles à étudier, pour les deux points de mesure et ceci pour une seule valeur de la vitesse. Dans l'exemple nous avons considéré une consigne d'entrée constante au niveau du péage et une charge aléatoire venant de la rampe.

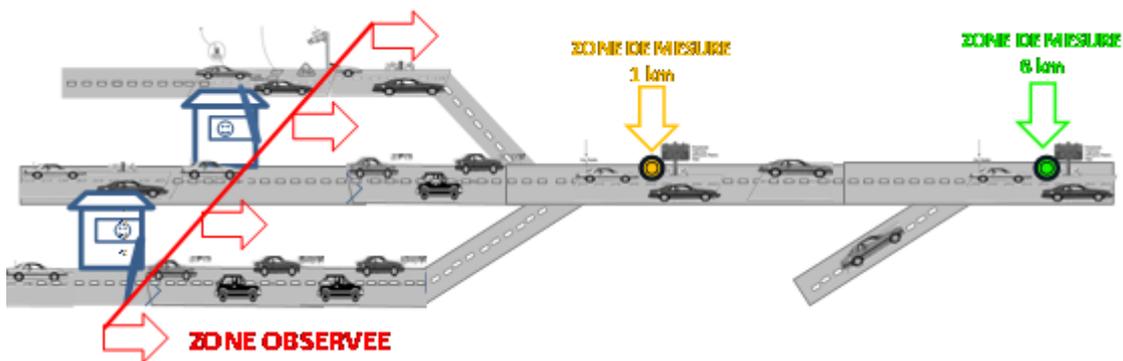


Fig.4.21. Etude d'un segment composé avec une rampe d'entrée entre deux points de mesure sur le segment

La rampe d'entrée, entre les deux points de mesure, représente une perturbation externe. Nous pouvons réaliser le schéma structurel du modèle en cascade (Fig.4.22.a) suivant les deux schémas structurels déjà présenté. Le modèle en cascade est représenté sous forme simplifiée sur la Fig.4.22.b. Il s'agit d'analyser l'influence de la densité véhiculaire provenant de la rampe et l'efficacité du contrôle sur l'ensemble du système de trafic.

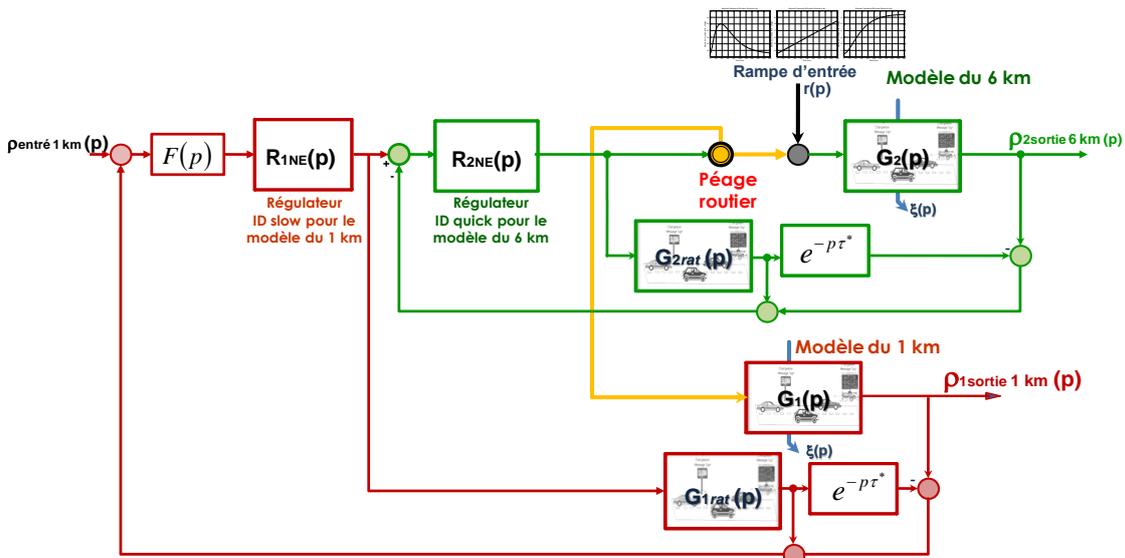


Fig.4.22.a. Système de commande cascade avec un prédicteur de Smith non entier et un filtre de compensation non entier DTC

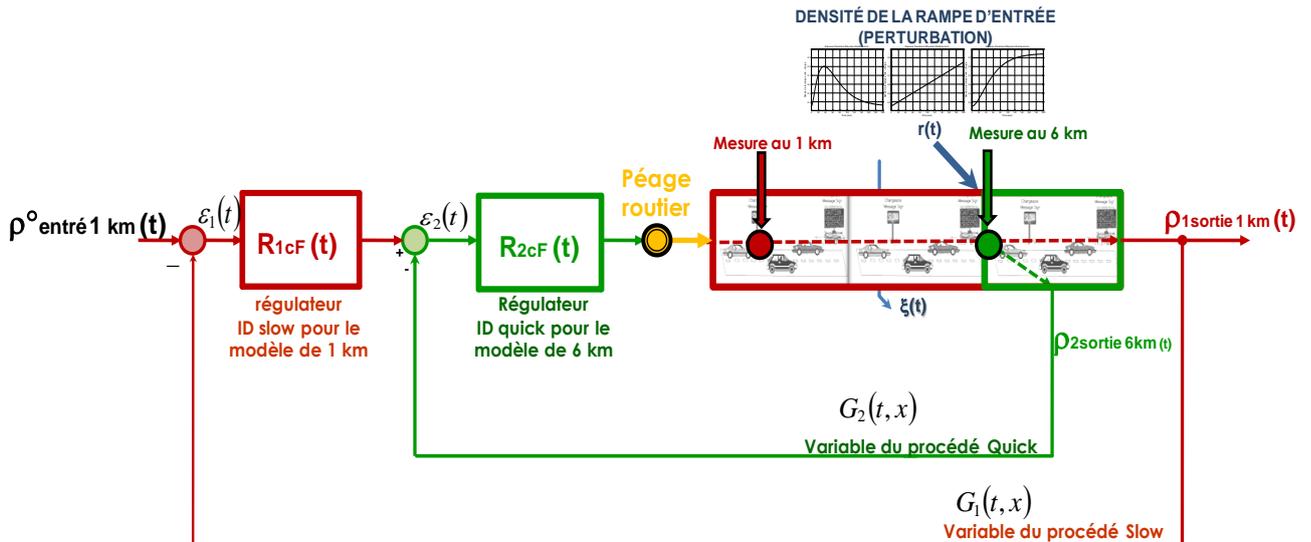
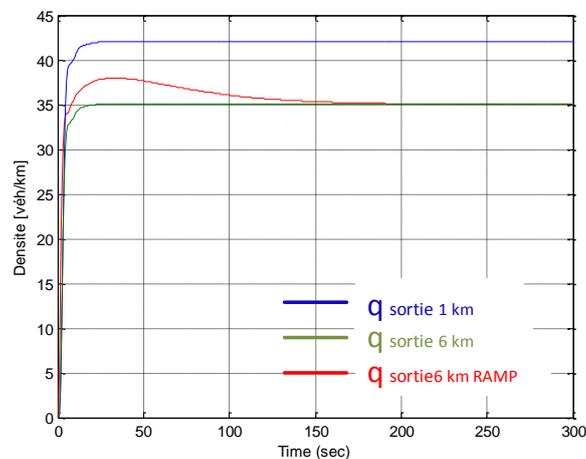


Fig.4.22.b. Système de commande cascade avec un prédicteur de Smith non entier et un filtre de compensation non entier DTC

Pour le système cascade nous utilisons les mêmes algorithmes non entier du régulateur (section IV.2.1) et du filtre (section IV.2.2) pour la synthèse du système de commande. Dans ce type de commande nous avons deux boucles. La première boucle est située au premier point de mesure, il s'agit d'une régulation d'un segment simple (procédé Slow). La deuxième est située au second point de mesure, il s'agit d'une boucle de régulation d'un segment avec une rampe d'entrée (procédé Quick).

### • Analyse temporelle

Nous considérons un segment avec une rampe d'entré. Pour le système en cascade nous considérons une consigne constante de  $\rho_{entré}=(0.35\rho_{max})$  sur la voie principale et une excitation sur la rampe d'entrée. La contrainte de fluidité et de limitation de la densité sur le segment est représenté par la relations suivante :  $\rho_s \leq (0.35\rho_{max})/L$ . Pour le cas d'étude nous utilisons le système avec une prédiction de Smith non entière. Nous avons comparés les résultats présentés section 4.2. avec ceux obtenus dans le cas d'un système en cascade (Fig.4.23).



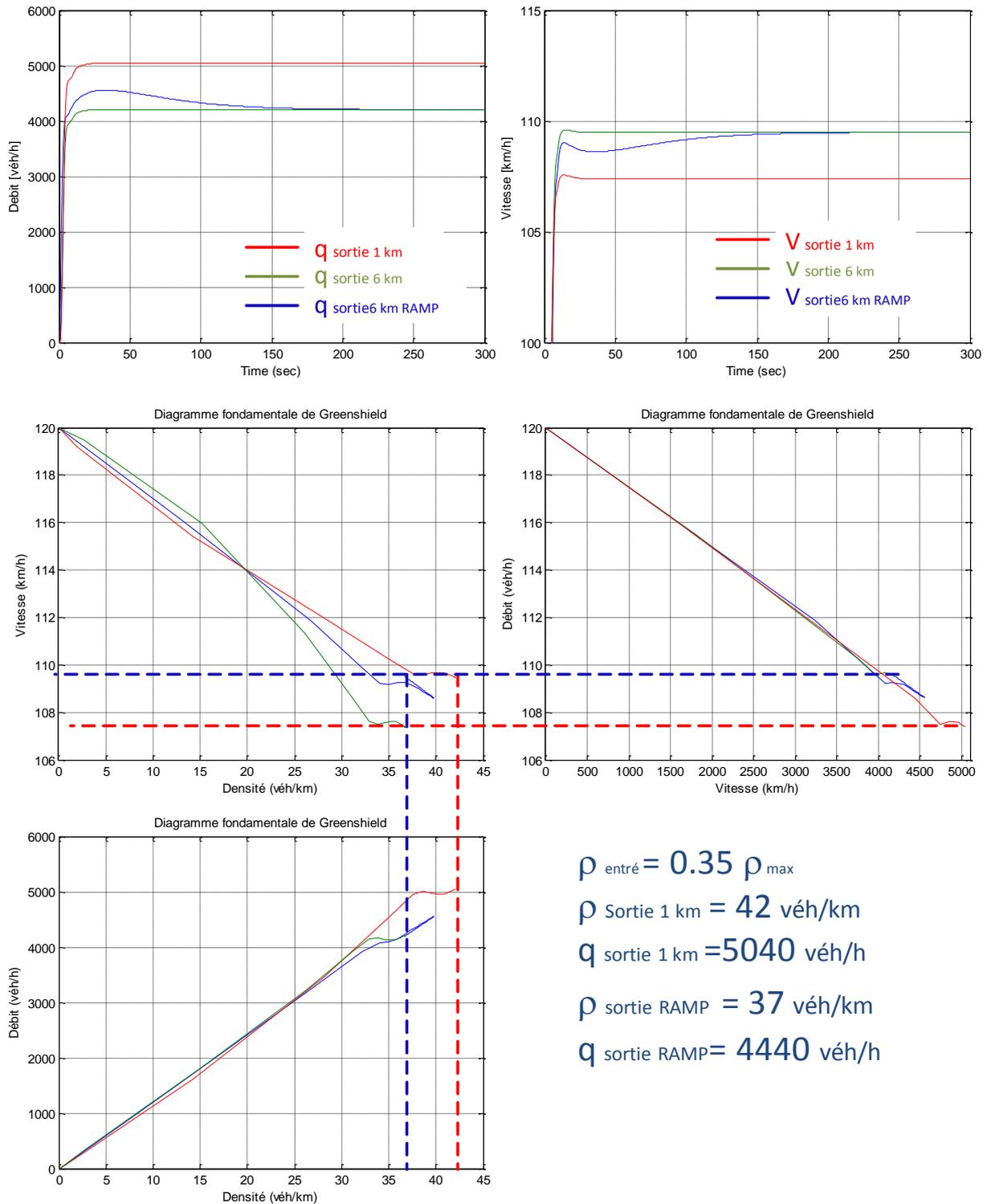


Fig.4.23. Etude temporelle et reconstitution du diagramme fondamentale d'un système en cascade - segment avec une rampe d'entrée - système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation DTC

Les résultats sur la Fig.4.23 montrent que pour le segment avec la rampe nous avons une augmentation du débit et une diminution de la vitesse. Nous avons comparé les résultats quand la rampe est fermée (système sans rampe) et quand la rampe est ouverte. Lorsque la densité sur le segment avec la rampe atteint la densité de contrainte, la commande réagit jusqu'à

ce que la densité sur ce segment se stabilise et devient égale à la densité quand la rampe est fermée. Nous pouvons observer que la rampe n'agit que sur la densité mesurée en aval. Dans le même temps nous pouvons observer une diminution de la vitesse lorsque la rampe est ouverte.

- **Analyse harmonique**

Les résultats de l'étude harmonique sont présentés sur la Fig.4.24.

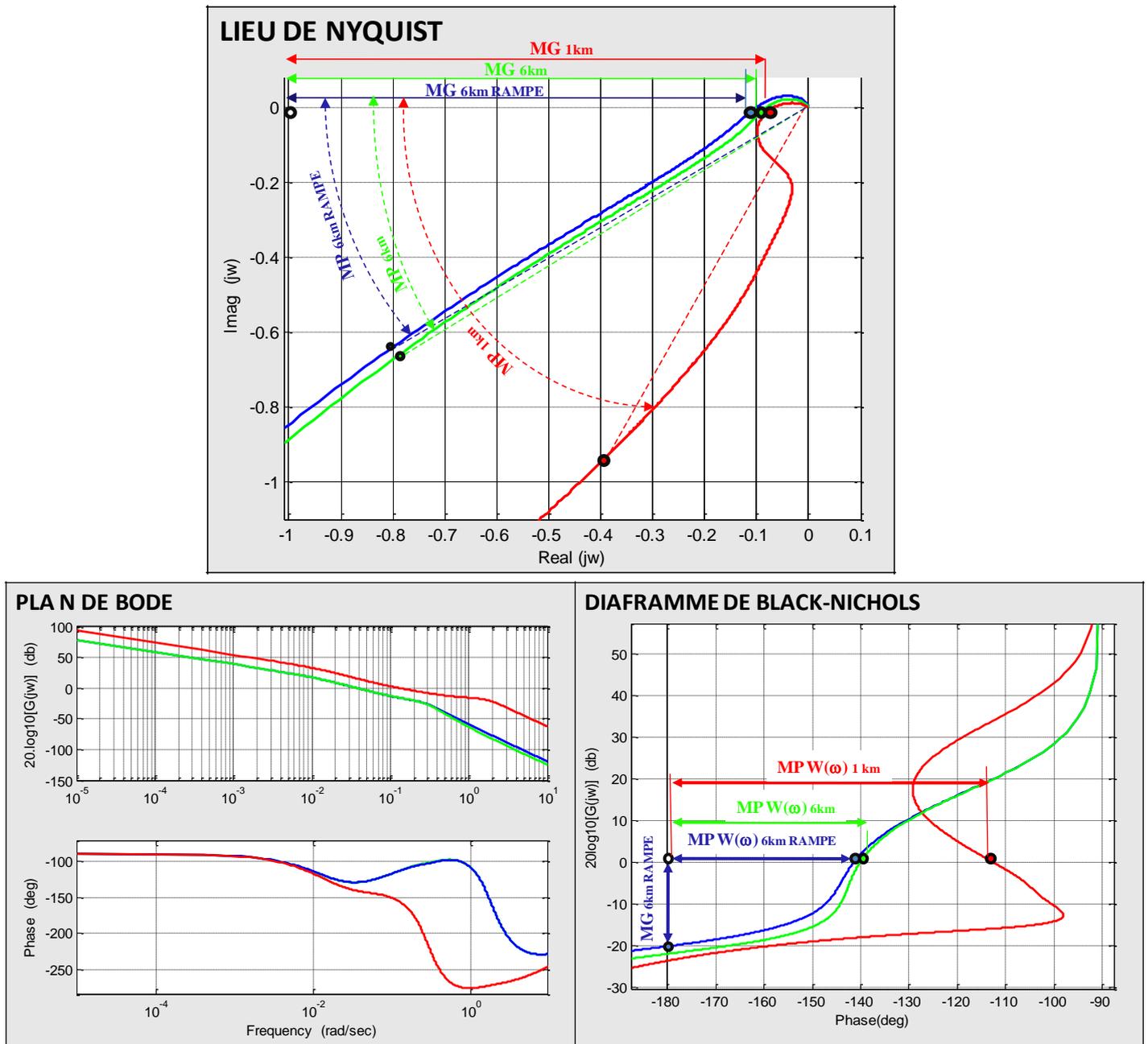


Fig.4.24. Etude harmonique d'un système en cascade pour un segment avec une rampe d'entrée - système de commande CRONE avec prédicteur de Smith et filtre de compensation

Sur le lieu de Nyquist et le diagramme de Black-Nichols nous avons montré les marges de module et de phase pour le système au 1<sup>er</sup> et au 6<sup>ème</sup> kilomètre quand la rampe est fermée, respectivement ouverte.

- **Analyse de Nyquist**

L'analyse de Nyquist du système en cascade est présenté sur la Fig.4.25.

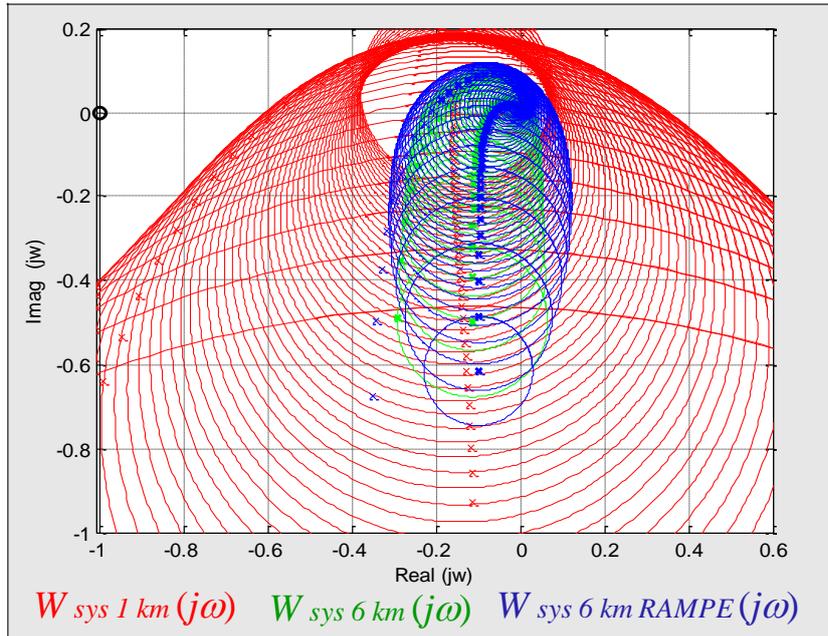


Fig.4.25. Analyse de Nyquist d'un système en cascade en B.O. - segment avec une rampe d'entrée

Sur la Fig.4.25 nous avons l'analyse de Nyquist du système au premier point et au deuxième point de mesure, quand la rampe est fermée et ouverte. Pour les deux points de mesure, nous avons le système qui répond à l'exigence de robustesse, car pour toute perturbation paramétrique aux deux points de mesure, le système assure la stabilité du procédé.

- **Analyse robuste**

L'analyse robuste est complétée avec les résultats obtenus pour le système (Fig.4.26) en boucle ouverte et en boucle fermée.

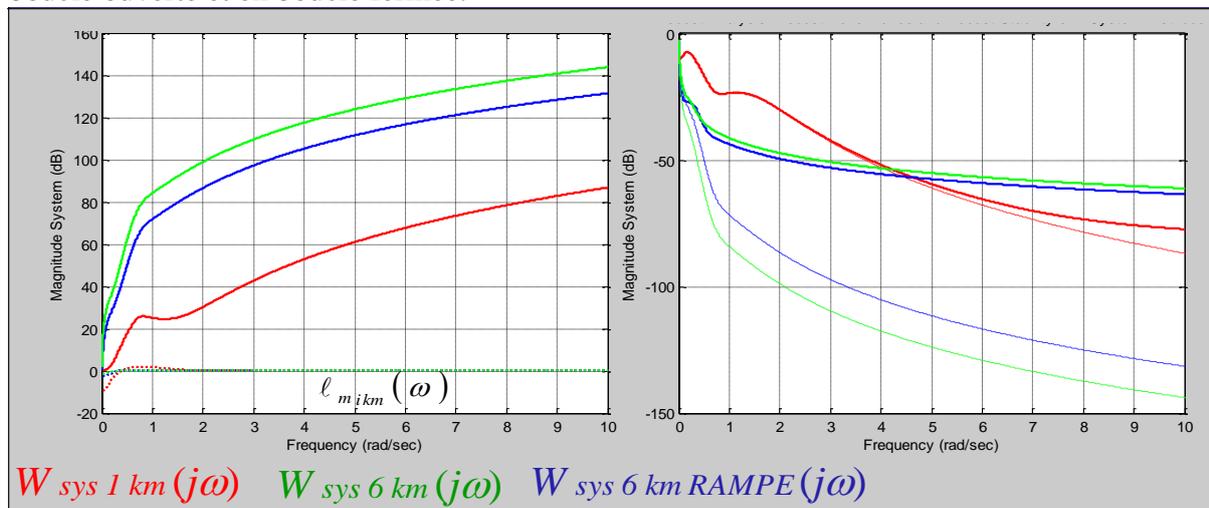


Fig.4.26 Analyse robuste d'un système en cascade en B.O. - segment avec une rampe d'entrée

Les résultats sur la Fig.4.26 montrent que le système en boucle ouverte, ainsi qu'en boucle fermée satisfait les conditions (4.25) et (4.26).

Les résultats obtenus avec les deux structures de commande, nous permettent de conclure que les systèmes de commandes suivent la contrainte et limitent la densité sur la voie rapide en aval du péage routier. Les résultats graphiques dans le domaine temporel, donnent le comportement sur les segments après le péage. Nous retrouvons la variation de la densité, du débit et de la vitesse pour chaque modèle et pour chaque scénario de l'étude. Nous pouvons conclure que tous les systèmes répondent aux exigences et aux contraintes et prouvent l'efficacité de la commande choisie. De plus la reconstitution de la partie fluide du diagramme fondamental dans les différents cas d'études valide également les résultats obtenus, les méthodes utilisées et donne la possibilité de comparer les approches utilisées dans la présente thèse avec celles issues de la littérature. Les résultats harmoniques permettent d'analyser la stabilité par ses indices et les performances des systèmes par leurs marges correspondantes.

Nous proposons une nouvelle présentation du lieu de Nyquist et du diagramme de Black-Nichols, en ajoutant un troisième axe dans les résultats graphiques sur lequel est portée la fréquence. Les résultats des réponses harmoniques dans les plans de Nyquist et de Black-Nichols sont alors présentés selon une forme 3D. Cette présentation a l'avantage de montrer l'influence de la fréquence sur le comportement et les performances des systèmes de commande ce qui est peu visible dans les caractéristiques 2D.

## **IV.5. Conclusion**

Ce chapitre est consacré à la commande des systèmes de flux de trafic. Le cas d'école étudié a concerné le contrôle de la densité véhiculaire en aval d'un péage autoroutier. Le principe physique de la commande repose sur le nombre de cabines de péage ouvertes. De cette façon il est possible de contrôler la densité véhiculaire en aval du péage en la maintenant à une valeur inférieure à une consigne. Nous avons proposé deux structures de commande. La première structure repose sur la mise en œuvre d'une prédiction de Smith. Une amélioration du système classique avec un prédicteur de Smith a été proposée. Elle consiste dans la conception robuste d'ordre non entière (approche CRONE) pour le réseau correcteur. La deuxième structure contient un régulateur avec une prédiction de Smith et un filtre de compensation DTC (Dead Time Compensator). La structure que nous avons réalisée est aussi améliorée par rapport au schéma de base, car pour le régulateur et le filtre nous avons proposé une synthèse non entière. L'étude comparative a pu montrer l'atout du filtre de compensation ajouté dans la boucle de commande. Le bilan entre les deux structures de commande dans le temps, montre que le filtre compense le retard au moment initial, ce qui correspond au moment du redémarrage des véhicules après les barrières de péage. En observant les réponses harmoniques, cette compensation est représentée par l'augmentation des marges de stabilité du système de commande. Après avoir prouvé

l'efficacité du système de commande CRONE avec un prédicteur de Smith et un filtre de compensation DTC sur un segment simple, nous avons effectué notre deuxième étude sur un segment composé contenant une rampe d'entrée en aval du péage. Dans cette étude nous n'avons pris que la deuxième structure (avec le filtre DTC) pour la commande du système. A partir des résultats, nous pouvons conclure que, pour les deux différentes situations et mesures effectuées, nous avons obtenu une invariance des marges de stabilité dans le domaine fréquentiel, le système de commande satisfait les conditions de robustesse et les critères de synthèse d'une commande non entière.

## CONCLUSION

Suite des objectifs envisagés on peut conclure que les contributions de cette thèse sont :

- Une étude approfondie des systèmes de flux de trafic routier, leurs variables et modèles de base (Ch.1).
- Une application de la méthode analytique par la «fonction de Green» pour la résolution du modèle macroscopique du 1<sup>er</sup> ordre LWR du flux de trafic routier. Le résultat est une présentation de la fonction de transfert du modèle LWR qui est un système à paramètres distribués. Nous avons utilisé le principe d'application de la fonction de Green pour l'équation d'Euler monodirectionnel, qui exprime le processus stationnaire de l'écoulement et de la distribution des véhicules sur les voies rapides (Ch.2).
- Une proposition de transformation du système du flux de trafic dans la classe des systèmes robustes.
- Une synthèse de la stratégie des systèmes asservis, leurs performances qualitatives et quantitatives, avec les conditions et les exigences d'un trafic fluide sur les voix rapides (Ch.3).
- Une application et un développement d'une structure cascade avec un prédicteur de Smith non entier pour la commande robuste d'ordre non entier.
- Une amélioration du schéma cascade précédente avec une compensation par un filtre non entier. A l'aide de ce schéma nous proposons une amélioration des performances et de la stabilité du système robuste.
- Une étude temporelle de la densité, du débit et de la vitesse du trafic naturel et du trafic avec une commande.
- Une analyse robuste du système de flux de trafic routier qui prouve l'intérêt des schémas de systèmes conçu et ses performances robustes.
- Une analyse graphique par les réponses temporelles, harmoniques et robustes du système de commande et une évaluation des qualités des systèmes de commande par rapport aux modèles du trafic naturel avec une présentation 2D et 3D des réponses harmoniques.

## PERSPECTIVES

Il reste un certain nombre de pistes d'améliorations concernant la modélisation, la résolution du modèle et la commande utilisées dans la présente thèse.

Concernant la modélisation, le modèle proposé est adapté aux modèles traitant le redémarrage à un feu ou une barrière. Les résultats obtenus sont satisfaisants dans le cas d'études choisi lorsque le trafic est dans un état stationnaire. Par contre les mêmes démarches peuvent être appliquées pour des cas en dehors des états d'équilibre. Cette idée pourrait être approfondie pour les modèles du deuxième ordre afin de pouvoir traiter de la même façon les problèmes

d'accélération et de décélération.

En général les recherches menées dans le cadre de la résolution des modèles de flux de trafic sont concentrées plutôt sur son traitement numérique et les techniques basées sur les simulations. Dans la présente thèse nous nous sommes éloignés des méthodes de résolution numériques en essayant de rechercher une solution analytique. De nombreuses difficultés mathématiques de résolutions analytiques sont apparues en dépit de l'apparente simplicité de la formulation du modèle. Il reste donc un champ important d'investigation dans ce cadre d'approches, notamment afin de mieux prendre en compte les non-linéarités du modèle et les comportements des véhicules intégrés dans les modèles d'ordre supérieur.

Enfin dans nos travaux de thèse, nous avons développé une approche de commande CRONE avec une prédiction de Smith et un filtre de compensation. Cette approche permet d'assurer une robustesse de la commande vis-à-vis des variations de paramètres et des perturbations générateurs d'incertitude du système. Notre approche permet d'assurer une stabilité et des performances robustes du modèle de trafic pris comme base d'étude. Toutefois d'autres approches de commande peuvent être étudiées, en particulier celles permettant de développer une meilleure prédiction du modèle qui mériterait d'être mieux évalué dans un cadre temps réel par rapport à celui choisi.

# BIBLIOGRAPHIE

- [Abouaissa et al. (2006)] H., Jordanova V., Jolly D., Flatness based control of traffic flow, 9<sup>th</sup> International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Toronto, Canada, 17-20 September 2006, pp. 1060-1065, 2006
- [Arfken G. et al. (2001)] Arfken G., Weber H. Mathematical methods for physicists, Academic Press 2001, ISBN 0-12-059825-6, 2001
- [Bellemans T. (2003)] Bellemans T., Traffic control on motorways, Dissertation Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, D/2003/7515/25, ISBN 90-5682-413-9, 2003
- [Benova B. (2006)] Systèmes d'ordre non entier pour la commande robuste, Thèse de doctorat, Université d'Artois et Université Technique de Sofia, 2006
- [Bergman S., (1953)] Bergman S., Schiffer M., Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics (Academic Press, New York, N.Y. 1953), 1953
- [Bourrel E. (2003)] Bourrel E., Modélisation dynamique de l'écoulement du trafic routier : du macroscopique au microscopique, Thèse de doctorat INSA de Lyon, ENTPE/INRETS, 2003
- [Buisson C. (1996)] Buisson C., Analyse bibliographique et première classification des algorithmes de simulation de l'écoulement du trafic routier, Recherches transports et sécurité, n° 53, p. 35-48, 1996
- [Cassidy M.J. (1998)] Cassidy M.J., Bivariate relations in nearly stationary highway traffic flow, "Transportation research 32B (1)": 49-59, 1998
- [CERTU (1997)] CERTU, La régulation des accès. Un outil pour l'exploitation des voies rapides urbaines, rapport d'étude, décembre 1997
- [Chanut S. (2005)] Chanut S., Modélisation dynamique macroscopique de l'écoulement d'un trafic routier hétérogène poids lourds et véhicules légers, Thèse de doctorat INSA de Lyon, ENTPE/INRETS, 2005
- [Daganzo C. et al. (2003)] Daganzo C., Laval J., Munoz J.C., The strategies for freeway congestion mitigation with advanced technologies, California PATH research report UCB-ITS-PRR-2002-3, 2003
- [Daganzo C. (1994)], Daganzo C.F., The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the

- hydrodynamic theory, *Transportation research part B*, vol. 28B, no4, pp. 269-287, 1994
- [Daganzo C. (1995)]** Daganzo C.F., Requiem for second-order fluid approximation of traffic flow. *Transportation Research*, 29 B, 277-286
- [Del Castillo et al. (1995)]** Del Castillo J., Benitez F., On the functional form of the speed-density relationship – I: General theory, *Transportation research part B* vol.29B, No. 5, pp. 373-389, 1995, 0191-2615(95)00008-9, 1995
- [Drake A. (1967)]** Drake A., *Statistical Analysis of Speed Density Hypotheses*. Drake, J. S., J. L. Schofer, and A. D. May (1967). *Highway Research Record*, 154, pp. 53-87, 1967
- [Duffy D.G. (2001)]** Duffy D.G., *Green's function with applications*, Chapman & Hall/CRC (2001), ISBN 1-58488-110-0, 2001
- [El Hmam M.S. (2006)]** El Hmam M.S., *Contribution à la modélisation et à la simulation hybride du flux de trafic*, Thèse de doctorat, Université d'Artois, 2006
- [Feliu-Batlle et al. (2009)]** Feliu-Batlle, Rivas Pérez, Castillo Garcí, Sanchez Rodriguez, Smith predictor based robust fractional order control: Application to water distribution in a main irrigation canal pool, *Journal of Process Control* 19 (2009) 506–519, 2009
- [Fliess M. et al. (1992)],** Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P., Sur les systèmes non-linéaires différentiellement plats, *C.R.Acad.Sci I-315* (1992), 619-624, 1992
- [Fliess M. et al. (1995)]** Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P., Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples, *International Journal of Control* 61 (1995), no 6, 1327-1360, 1995
- [Frank T.D. (2008)]** Frank T.D., Green functions and Langevin equations for nonlinear diffusion equations: A comment on Markov process, Hurst exponents and nonlinear diffusion equations' by Bassler et al. *Physica A* 387 (2008) 773-778, 2008
- [Franklin G. et al. (1990)]** Franklin G., Powell J., Workman M., *Digital control of dynamic system*, Addison-Wesley Publishing Company Ins., 1990
- [Fried H.M. (2002)]** Fried H.M., *Green's functions and ordered exponentials*, Cambridge University press, 2002, ISBN 0 511 020627, 2002
- [García P. et al. (2008)]** García P., Albertos P., A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time, *Automatica* 44 (2008) 1062 – 1071, 2008
- [Giorgi F. (2002)]** Giorgi F., *Prise en compte des transports en commun de surface*

- dans la modélisation macroscopique de l'écoulement du trafic, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, ENTPE/INRETS, 2002
- [Goncalvès E. (2004)]** Résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles, INPG, 2004
- [Greenberg H. (1959)]** An analysis, of traffic flow, Operations Research, Vol. 7, No. 1 (Jan. - Feb., 1959), pp. 79-85, 1959
- [Greenshields B. D. (1935)]** Greenshields B. D., A Study of Traffic Capacity. Highway Research Board Proceedings 14, p. 448-477, 1935
- [Guzmán J. et al.(2007)]** Guzmán J.L., Garcia P., Hägglund T. et al., Interactive tool of analysis of time-delay systems with dead-time compensator DTC, Control Engineering Practice 16 (2008) 824–835, 2007
- [Haberman R. et al. (1987)]** Haberman R., Richard, Elementary applied partial differential equation with Fourier Series and Boundary Value Problems, 1987, ISBN 0-13-252875-4, 1987
- [Hadamard J. (1968)]** Hadamard J., "Memoire sur le problème d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques eucastées" Mém. prés. par divers savants à l'Acad. Sci. , 33 (1907) (Also: Oeuvres, Vol. II, C.N.R.S. (1968), pp. 515–631), 1968
- [Hegyi A. (2004)]** Hegyi A., Model Predictive Control for Integrating Traffic Control Measures, Dissertation Thesis, Delft University of Technology, ISBN 90-5584-053-X, 2004
- [Hegyi A. et al. (2005)]** Hegyi A., De Schutter B., Hellendoorn H., Model predictive control for optimal coordination of ramp metering and variable speed limits, Transportation research part C 13 (2005) 185-209, 2005
- [Hoogendorn S. et al.(2000)]** Hoogendorn S., Bovy P., State of art of vehicular traffic flow modeling, pp. 20-30, Special Issue on Road Traffic Modeling and Control of the Journal of Systems and Control Engineering, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part1, 2000
- [Ingimundarson A. (2001)]** Ingimundarson A., Hägglund T., Robust tuning procedures of dead-time compensating controllers, Control Engineering Practice 9 (2001) 1195–1208, 2001
- [Izermann R. (1981)]** Izermann R., Digital Control Theory. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1981
- [Jin W. (2003)]** Jin W., Kinematic Wave Models of Network Vehicular Traffic, Dissertation Thesis, University of California, September 2003
- [Jutard A. et al. (1997)]** Jutard A., Betemps M., Automatique – Systèmes Asservis

Linéaire de Continus, Laboratoire d'automatique industrielle, INSA de Lyon, 1997

- [Kachroo P. (2000)]** Kachroo P., System dynamics and feedback control design problem formulations for real time ramp metering, 2000 Society for Design and Process Science, Journal of integrated design and process science, march 2000, vol.1, No. 1, 54, 2000
- [Kachroo P. et al. (2000)]** Kachroo P., Krishen K., System dynamics and feedback control design problem formulations for real time ramp metering, 2000 Society for Design and Process Science, Journal of integrated design and process science, march 2000, vol.4, No. 1, pp.37-54, 2000
- [Kachroo P. et al. (1998)]** Kachroo P., Ozbay K., Solution to the user equilibrium dynamic traffic routing problem using feedback linearization, Transpn Res.-B, Vol 32, N° 5, pp. 343-360, 1998, PII: S0191-2615(97)00031-3, 1998
- [Kadanoff L. et al. (1962)]** Kadanoff L. P., Baym G., Quantum statistical mechanics (Green function methods in equilibrium and nonequilibrium problems), Benjamin inc, New York 1962, 1962
- [Kotsialos A. et al. (2001)]** Kotsialos A., Papageorgiou M., The importance of traffic flow modelling for motorway traffic control. Networks and spatial economics, 1:2001 179-203, 2001 Kluwer Academic Publishers, Manufactured in the Netherlands, 2001
- [Kotsialos A. et al. (2002)]** Kotsialos A., Papageorgiou M., Coordinated and integrated control of motorway networks via non-linear optimal control, Transportation research part C 10 (2002) 65-84, 2002
- [Kotsialos A. et al. (2004)]** Kotsialos A., Papageorgiou M., Motorway network traffic control systems, European journal of operational research 152 (2004) 321-333, 2004
- [Kotsialos A. et al. (2002)]** Kotsialos A., Papageorgiou M., Mangeas M., Haj-Salem H., Coordinated and integrated control of motorway networks via non-linear optimal control, Transportation research part C 10 (2002) 65-84, 2002
- [Kotsialos A. et al. (1999)]** Kotsialos A., Papageorgiou M., Messmer A., Optimal Coordinated and Integrated Motorway Network Traffic Control, Chapter 8 – Traffic Information and Control, Transportation and Traffic Theory, Proceeding of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Jerusalem, Israel, 20-23 july 1999, ISBN 0 08 043448 7, Pergamon, p.621, 1999

- [Labit Y. (2007)]** Labit Y., Contribution à la commande non-linéaire par des approches linéaires, Thèse de doctorat de l'INSA de Toulouse, LAAS de CNRS, tel-00131792, 2007
- [Laroche B. et al. (2006)]** Laroche B., Martin Ph., Petit N., Commande par platitude – équations aux différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, Notes de cours B7-4 du module Automatique avancée ENSTA, 2006-2007-06-19, 2006
- [Lebacque J. et al. (1999)]** Lebacque J.P., Lesort J.B., Macroscopic Traffic Flow Models: a question of order, Chapter 1 – Traffic Flow Models, Transportation and Traffic Theory, Proceeding of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Jerusalem, Israel, 20-23 july 1999, ISBN 0 08 043448 7, Pergamon, p.3, 1999
- [Leclercq L. (2002)]** Leclercq L., Modélisation dynamique du trafic et application à l'estimation du bruit routier, Thèse de doctorat INSA de Lyon, ENTPE/INRETS, 2002
- [Levitov L. C. et al. (2000)]** Levitov L. C., Shitov A. B., Problèmes de la physique théorique avec solutions. Fonction de Green, problèmes et solutions. Moscow, 2000
- [Lighthill M. et al. (1955)]** Lighthill M., Whitham G., On kinematic waves I. Flood movement in long rivers. In Proceedings of the Royal Society, volume 229A, pages 281–316, London, May 1955
- [Lighthill M. et al. (1955)]** Lighthill M., Whitham G., On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads, In Proceedings of the Royal Society, volume 229A, pages 317–345, London, May 1955
- [Maerivoet S. (2006)]** Maerivoet S., Modelling traffic on motorways: state-of-the-art, numerical data analysis, and dynamic traffic assignment, Katholieke Universiteit Leuven, ISBN 90-568-2708-1, 2006
- [Mandelis (2001)]** Mandelis, Diffusion-Wave Fields: Mathematical Methods And Green Functions, Springer-Verlag New York Inc, 2001
- [Matko D. et al. (2000)]** Matko D., Geiger G., Gregoritz W., Pipeline simulation techniques, Mathematics and Computers in Simulation 52 (2000) 211-230, PII: S0378-4754(00)00152-X, 2000
- [Mounier H. (2006)]** Mounier H., Engineering control systems – Trajectory tracking and Automotive real time framework, ISIC Master Course notes, 2006-2007, Institute of fundamental electronics, ch.X – Non linear systems tracking, 2006
- [Neta B. (2003)]** Neta B., Numerical solution of partial differential equations, MA

- 3243 Lecture notices, 2003
- [Ngoduy D. (2006)]** Ngoduy D., Macroscopic Discontinuity Modeling for Multiclass Multilane Traffic Flow Operations, Dissertation Thesis, Delft University of Technology, ISBN 90-5584-075-0, 2006
- [Ngoduy D., et al. (2003)]** Ngoduy D., Hoogendoorn S.P., Positively conservative scheme for macroscopic traffic flow models, IFAC CTS 10: The 10th Symposium on Control in transportation systems, 4-6 August 2003 Tokyo, 2003
- [Nikolov E. (2004)]** Nikolov E., Fractional Order Control Algorithms and Controllers, Sofia 2004, © 2004 ed. of Technical University Sofia, Sofia, ISBN 954-438-395-6, 2004
- [Nikolov E. (2002)]** Nikolov E., Approximations and Realizations of the Fractal Control Algorithms, In: Proc. of International Conference AUTOMATICA AND INFORMATICS`2002, Bulgaria, Nov 14-15 2002, symposium “Control Power Plants and Systems”, © 2002 Union of Automation and Informatics, Vol. 3, ISBN 954-9641-27-9, 27-32, 2002
- [Nikolov E. (2003)]** Nikolov E., Applied Methods for Process Control - part I (frequency methods and systems with robust performances), © 2003 Ed. of Technical University Sofia, Sofia 2003, ISBN 954-438-334-4, 2003
- [Nikolov E. (2005)]** Nikolov E., Robust Control System, Sofia 2005, © 2005 Ed. of Technical University Sofia, ISBN 954-438-499-5, 2005
- [Nikolov E. (2008a)]** Nikolov E., Fractional Dead-Time Compensators in the HVAC-Control Systems in the Building, In Proc. of the National Conference AUTOMATICA AND INFORMATICS`08, Symposium “Control Power Plants and Systems”, November 14-15, 2008, Stara Zagora, © 2008 Union of Automation and Informatics, ISBN-1313-2237, 43-50, 2008
- [Nikolov E. (2008b)]** Nikolov E., Fractional Robust Dead-Time Compensation in the Control System, Automatica and Informatics Journal, 3/2008, © 2008 Union of Automation and Informatics, ISSN 0861-7562, 49-60, 2008
- [Normey-Rico et al. (2007)]** Normey-Rico J.E., Camacho E.F. Dead-time compensators : A survey, Control Engineering Practice 16 (2008) 407–428, 2007
- [Normey-Rico et al. (2008)]** Normey-Rico J.E., Camacho E.F. Unified approach for robust dead-time compensator design, Journal of Process Control 19 (2009) 38–47, 2009

- [Oustaloup A. (1991)]** Oustaloup A., La commande CRONE, Commande robuste d'ordre non entier, Hermès (Traité des Nouvelles Technologies-Série Automatique), Paris, ISBN 2-86601-289-5, 1991
- [Oustaloup A. (1994)]** Oustaloup A., La robustesse, analyse et synthèse de commandes robustes, Hermès, 1994
- [Oustaloup A. (1995)]** Oustaloup A., La dérivation non-entière, théorie, synthèse et applications, Hermes, Science pure, (Traité des Nouvelles Technologies-Série Automatique), Paris, ISBN 2-86601-456-1, 1995
- [Oustaloup A. (1997)]** Oustaloup A., Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire, Elsevier-Masson, Automatique, Science appliquées, 1997
- [Oustaloup A. et al (1998)]** Oustaloup A. et al., Un tour d'horizon sur la commande CRONE, Journal Européen des Systèmes Automatisés 32, 1 (1998) 7-40, 1998
- [Oustaloup A. et al. (1999)]** Oustaloup A., Benoît M., La commande CRONE, du scalaire au multi variable, Hermès (Traité des Nouvelles Technologies-Série Automatique), Paris, ISBN 2-7462-0043-0, 1999
- [Panza M. (2008)]** Panza M., Application of Euler-Maclaurin sum formula to obtain an approximate closed-form Green's function for a two-dimensional acoustical space, Journal of sound and vibration 311 (2008) 269-279, 2008
- [Papageorgiou M. (1991)]** Papageorgiou M., Concise encyclopedia of traffic and transportation systems. Pergamon, Oxford, 1981
- [Papageorgiou M. (1983)]** Papageorgiou M., Application of automatic control concept to traffic flow modeling and control, In: Balakrishnan, A.V., Thoma, M. (Ed.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, pp. 4-41, 1983
- [Papageorgiou M. (1998)]** Papageorgiou M., Some remarks on macroscopic traffic flow modeling, Copyright © 1998 Elsevier Science Ltd, S0965-8564(97)00048-7, Transpn Res.-A, Vol. 32, No. 5, pp. 323±329, 1998
- [Papageorgiou M. (2003)]** Papageorgiou M., Traffic Control, Handbook of Transportation Science, Chapter 8, Vol.56, Ed. Hall, Randolph W., 2nd ed., 2003, ISBN: 978-1-4020-7246-8, 2003
- [Papageorgiou M. (2004)]** Papageorgiou M., Overview of road traffic control strategies, IFAC DECOM-TT 2004, Automatic systems for building in the Infrastructure in developing countries, October 3-5, 2004, Bansko, Bulgaria, 2004

- [Papageorgiou M. (2003)]** Review of road traffic control strategies, Proceeding of IEEE, vol. 91, No. 12, December 2003
- [Papageorgiou M. (2006)]** Papageorgiou M., Wang Y., Local ramp metering in the case of distance downstream bottlenecks, Proceeding of IEEE ITSC 2006 Intelligent transport systems conference Toronto, Canada September 17-20, 2006
- [Payne H.J. (1971)]** Payne H.J., Models of freeway traffic and control, In: Bekey, G.A. (Ed.), Mathematical model of public systems, Simulation Council Proceeding, vol. 1, pp. 51-61, 1971
- [Pipes L.A. (1953)]** Pipes L.A., An operational analysis of traffic dynamics, J. Appl. Phys. 24(3), pp. 274-281, 1953
- [Poschinger A. et al. (1999)]** Poschinger A., Cremer M., Keller H., A new feed-back process by means of dynamic reference values in rerouting control, Chapter 8 – Traffic Information and Control, Transportation and Traffic Theory, Proceeding of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Jerusalem, Israel, 20-23 July 1999, ISBN 0 08 043448 7, Pergamon, p.601, 1999
- [Prigogine I. (1961)]** Prigogine I., Introduction to thermodynamics of irreversible processes, New York, Interscience publishers, p. 108-111, 1961
- [Prigogine I. et al. (1971)]** Prigogine I., Herman R., Kinetic Theory of Vehicular Traffic, American Elsevier Pub Co, SBN 10: 0444000828 / 0-444-00082-8, 1971
- [Rascle M. (2002)]** Rascle M., An Improved macroscopic model of the traffic flow: derivation and links with the Lighthill-Whitham model, Mathematical and computer modelling 35 (2002) 581-590, 2002
- [Richards P.I. (1956)]** Richards P.I., Shock waves on the highways, Operation Research, 4, 42-51, 1956
- [Sanwal K. et al. (1996)]** Sanwal K., Petty K., Walranf J., Fawaz Y., An extended macroscopic model for traffic flow, Transportation research part B, vol. 30, No. 1, pp. 1-9, 1996, 0191-2615(95)00017-8, 1996
- [Smaragdis E. et al. (2004)]** Smaragdis E., Papageorgiou M., Kosmatopoulos E., A flow-maximizing adaptive local ramp metering strategy, Transportation research part B 38 (2004) 251-270, 2004
- [Smoller J. (1994)]** Smoller J., Shock waves and reaction-diffusion equations, A series of comprehensive studies in matematics, Springer-Verlag, 1994
- [Stakgold I. (1979)]** Stakgold I., Green's functions and boundary value problem, Wiley&Sons Inc, 1979, ISBN 0-471-81967-0, 1979

- [Canat Sy. (2005)]** Canat Sy., Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non-entier de la machine asynchrone à cage, Thèse de doctorat INPT, ENSEEIHT, UMR CNRS № 5828, 2005
- [Taylor J. et al. (2004)]** Taylor J., McKenna P., Young P., Chotai A., Macninnon M., Macroscopic traffic flow modelling and ramp metering control using Matlab/Simulink, Environmental Modelling & Software 19 (2004) 975-988, 2004
- [Valdes-Parada et al. (2008)]** Valdes-Parada, Sales-Crous, Ochoa-Tapia, Alvarez-Ramirez, On Green's function methods to solve nonlinear reaction-diffusion systems, Computers and chemical engineering 32 (2008) 503-511, 2008
- [Wang S. et al. (2007)]** Wang S., Xu, Li X., Green's function of time fractional diffusion equation and its applications in fractional quantum mechanics, Nonlinear Analysis 2007
- [Warschawski S.E. (1960)]** Warschawski S.E., "On Hadamard's variation formula for Green's function" J. Math. Mech., 9 (1960) pp. 497–511
- [Winckelmans G. (2007)]** Winckelmans G., Classification des équations aux dérivées partielles, méthode de caractéristiques pour les cas hyperboliques, Octobre 2007
- [Zhang H. M. (1998)]** Zhang H.M., A theory of non-equilibrium traffic flow, Trans. res.-B, Vol.32, N°7, pp. 485-498, 1998, PII:S0191-2615/98/00014-9, 1998
- [Zhang H.M. (1999)]** Zhang H.M. A mathematical theory of traffic hysteresis, Transportation research part B, Vol 33, p. 1-23, 1999
- [Zhang W. (2006)]** Zhang W., Freeway Travel Time Estimation Based on Spot Speed Measurements, Dissertation Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2006
- [Zhang W. et al. (2007)]** Zhang W., Rieber J.M., Gu D., Optimal dead-time compensator design for stable and integrating processes with time delay, Journal of Process Control 18 (2008) 449–457, 2007
- [Zhang Y. et al. (1997)]** Zhang Y., Chien C., Iouannou P. Traffic density control for automated highway systems, Automatica, Vol33,N°7, pp. 1273-1285, PII: S0005-1098/97/00050-2, 1997
- [Бесекерский В.А. (1972)]** Бесекерский В.А., Е.П. Попов Теория систем автоматического регулирования, М., Наука, 1972
- [Бицадзе А.В. (1981)]** Бицадзе А.В., Некоторые классы уравнений в частных производных, ИБ №11638, изд. Москва 1981
- [Бутковский А. (1979)]** Бутковский А., Характеристики систем с распределенными

параметрами, Москва, 1979, ИБ 11027, Б 30501-019 182-79.1502010000, 1979

- [Наплатанов Н. (1977)] Наплатанов Н. Методи за синтез на САУ, Техника, София 1977
- [Оппельт В. (1960)] Оппельт В., Основы техники автоматического регулирования, М., 1960
- [Табликов С.В. (1961)] Табликов С.В., Бонч-Бруевич В. Л. Метод функций Грина в статистической механике, Москва 1961
- [Хинов Х. (1977)] Хинов Х., Автоматизация на технологични процеси, Изд. "Техника", ©1977 София, I-4, 03-95346-72511-4790-39-77, Изд.№ 10840, стр.239-243, 1977
- [www.calccit.org] [http://www.calccit.org/itsdecision/servandtech/Rampmetering/ramprep\\_print.htm](http://www.calccit.org/itsdecision/servandtech/Rampmetering/ramprep_print.htm)
- [www.sciences.univ-nantes.fr] <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/aloui/mnumeri/71derpar/71derpar.htm>
- [gershwin.ens.fr] <http://gershwin.ens.fr/vdaniel/Doc-Locale/Cours-Mirrored/Operateurs-Differentiels/www.chez.com/touslescours/math/cours/opdiff/node40.html>
- [www.lifelong-learners.com] <http://www.lifelong-learners.com/pde/nu/SYL/s1node14.php>
- [www-hadoc.ensieg.inpg.fr] <http://www-hadoc.ensieg.inpg.fr/hadoc/discret/top/01.htm>
- [http://iacs.epfl.ch/asn] <http://iacs.epfl.ch/asn/Support/support/node112.html>

# BIBLIOGRAPHIE DE L'AUTEUR

1. **Uzunova M., D. Jolly, E. Nikolov, K. Boumediene** (2008), *The macroscopic LWR model of the transport equation viewed as a distributed parameter system*, The Fifth International Conference on Soft Computing as Transdisciplinary Science and technology (CSTST'08) SW-I, Cergy-Pontoise/Paris, p. 572, ACM ISBN: 978-1-60558-046-3, October 27 – 31, 2008
2. **Uzunova M., D. Jolly, E. Nikolov, K. Boumediene** (2008), *Green function analytical method of solution of transport equation. Modeling and simulation of the macroscopic LWR model as a distributed parameter system*, The Fifth International Conference on Soft Computing as Transdisciplinary Science and technology (CSTST'08) SW-I, Cergy-Pontoise/Paris, p. 577, ACM ISBN: 978-1-60558-046-3, October 27 – 31, 2008
3. **Uzunova M., Jolly D., Nikolov E.** (2008), *Analytical method of resolution and simulation of the transport equation viewed as a distributed parameter system*, The 2<sup>nd</sup> "META'08" International Conference on Metaheuristics and Nature Inspired Computing, 29-31 October, Hammamet, Tunisia
4. **Uzunova M., D. Jolly, E. Nikolov** (2008), *Analytical Methods and Algorithm of Decision LWR - Model of Traffic Flow in a Class of Distributed Parameters Systems*, Information Technologies and Control Journal, & Oacute; 2005 Bulgarian Union of Automatics and Informatics 2005, ISSN 1312-2622, No 4/2008, 19-27
5. **Uzunova M., D. Jolly, E. Nikolov** (2008), *Analytical Methods of Decision LWR - Model of Traffic Flow in a Class of Distributed Parameters Systems*, In Proc. of the National Conference AUTOMATICA AND INFORMATICS'08, Session "Theory of Automatic Control", October 02-03, 2008, Sofia, & Oacute; 2008 Union of Automation and Informatics, ISBN-10:954-9641-49-X, ISBN-13:978-954-49-3, X-29 -X-34
6. **Uzunova M.** (2007), *Non integer control for automation systems. Industrial plants and traffic flow model system applications*, CLIMACADEMY – Course 3, 'Industrial ventilation', Euroacademy on Ventilation and Indoor Climate, Pamporovo, Bulgaria, October 18-25, 2007, Marie Curie Action of the European Commission, ISBN 978-954-91681-7-4.
7. **Uzunova M., Jolly D.** (2006), *Dissipated power in discreet fractional system for controlling*, IFAC Congress, Energy saving control in plants and buildings 2 – 5 October 2006, Bansko, ISBN – 10:954-9641-47-3, ISBN – 13: 978-954-9641-47-
8. **Uzunova M.** (2006), *Discretization methods of a fractional control algorithms approximation*, "Challenger in higher education and research in the 21<sup>st</sup> century", 31 Mai – 3 June 2006, Sozopol, ISBN – 10: 954-580-206-5, ISBN – 13: 978-954-580-205-5.
9. **Uzunova M.** (2005), *"Initiation des systèmes discrets fractals de commande"*, "OPEM" 2005, 5<sup>ème</sup> École International, 18 – 21 Septembre 2005, Sozopol.

## Annexe 1

### *Modélisation des flux de trafic routiers*

#### - *Choix des conditions initiales et aux limites*

Dans le cas d'une représentation du flux de trafic routier selon un modèle du 1<sup>er</sup> ordre, il est possible de choisir les conditions initiales (IC) et les conditions aux limites (BC). Leur choix peut être guidé en se basant sur les contraintes issues de la littérature, qui dans le cas des modèles des flux de trafic routier sont présentés par (A.1.1) - (A.1.5).

#### ▪ **Choix de condition initiale:** quand $t=0$

- Condition initiales nulle (A1.1) :

$$\rho(x,0) = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

- Conditions initiales non nulles (A1.2) :

$$\rho(x,0) = g(x,t) = \delta(x - \xi), \xi \in [0, L] \quad (\text{A.1.2})$$

#### ▪ **Choix des conditions aux limites :** quand $x=0, x=L$ où $x \in [0, L]$

- Condition aux limites selon Dirichlet – dans le cas d'une variable spatiale limitée dans un intervalle – une distance de la route par exemple (A.1.3):

$$x \in [0, L] \Rightarrow \begin{cases} \rho(0,t) = f_1(0,t) \\ \rho(L,t) = f_2(L,t) \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

- Condition aux limites selon Neumann: dans le cas de l'équation d'onde (A.1.4)

$$k \frac{\partial \rho}{\partial n_i} \Big|_{x_i} = f_i(x_i, t), \quad (\text{A.1.4})$$

$n$  – surfaces,  $i$  – nombre des points spatiaux

- Condition aux limites selon Robin (A.1.5) :

$$k \frac{\partial \rho}{\partial n_i} \Big|_{x_i} + h_i \rho(x_i, t) = f_i(x_i, t), \quad (\text{A.1.5})$$

$f_i(x_i, t) - h_i T_\infty$ ,  $h_i$  – équation de la chaleur

Pour les modèles des seconde ordres, nous pouvons toujours compléter le modèle avec

#### - *Modèle discret d'une rampe d'entrée pour le modèle de 2ème ordre (A.1.6)*

$$\begin{cases} \rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{L_m \lambda_m} [q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k) + r_{m,i}(k)] \\ r_{m,i}(k) = -\frac{\delta_1 T}{L_m} \frac{r_{m,i}(k) v_{m,i}(k)}{\rho_{m,i}(k) + k \lambda_m} \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

$r_{m,i}(k)$  - équation de la rampe d'entrée et  $\delta_1$  est un paramètre du modèle

#### - *Modèle discret d'une rampe de sortie pour le modèle de 2ème ordre (A.1.7)*

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{L_m \lambda_m} [q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k) - s_{m,i}(k)]$$

$$s_{m,i}(k) = -\frac{\delta_2 T \nu}{\tau L_m} \frac{s_{m,i}(k)}{\underbrace{q_{m,i}(k) + r_{m,i}}_{\text{densité OUT rampe}}} \frac{\rho_{m,i}^s(k) - \rho_{m,i+1}(k)}{\underbrace{\rho_{m,i}(k) + k \lambda_m}_{\text{densité}}}$$

densité<sub>OUT</sub>voie + densité<sub>N</sub>rampe

$s_{m,i}(k)$  - équation de la rampe de sortie et  $\delta_2$  est paramètre du modèle

- **Modèle discret d'un rétrécissement pour le modèle de 2ème ordre (A.1.8)**

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{L_m \lambda_m} [q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k) - \chi_{m,i}(k)]$$

$$\chi_{m,i}(k) = -\frac{\phi T}{L_m} \underbrace{\frac{(\lambda_m - \lambda_{m+1})}{\lambda_m}}_{\text{rapport les nombres voies}} \frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr}} v_m^2(k)$$

$\chi_{m,i}(k)$  - équation d'un rétrécissement

- **Modèle discret d'une file d'attente**

Les modèles discrets de flux de trafic routiers présentés dans le chapitre 1 ne concernent que des segments simples. Par contre dans le cas d'une structure complexe présentant par exemple des changements dans la géométrie de la route, il est nécessaire d'ajouter dans l'équation de conservation de la masse un terme qui explique le modèle d'une rampe d'entrée (de sortie, d'un rétrécissement etc.) où nous pourrions observer le phénomène de construction d'une file d'attente. Alors dans la relation décrivant la rampe dans le modèle de base, apparait un terme sur la formation d'une file d'attente (A.1.9) [Hegyí A. et al. (2005)], [Kotsialos A. et al. (2002)], [Kotsialos A., Papageorgiou M. (2001)] :

$$w_{o,j}(k+1) = w_{o,j}(k) + T \left[ \underbrace{\theta_{o,j} d_o(k)}_{\text{portion qui entre sur la rampe}} - \underbrace{\gamma_{o,j} q_o(k)}_{\text{portion qui sort de la rampe}} \right], [véh];$$

Une rampe d'accès est assimilable à un segment simple. Elle reçoit une demande en entrée, et envoie des véhicules sur la voie principale selon les contraintes et les conditions d'injection de véhicules ce qui peut provoquer la formation d'une file d'attente dans les heures de pointe. Les modèles de file d'attente sont les suivants :

*File d'attente simple – sur un tronçon de route d'indice j*

$$w_{o,j}(k+1) = w_{o,j}(k) + T [\theta_{o,j} d_o(k) - \gamma_{o,j} q_o(k)], [véh];$$

où : les conditions de la construction de la file d'attente sont les suivantes :

$q_o(k) = r_o(k) \hat{q}_o(k)$ ; - partie du flux qui va sortir de la rampe – si  $r_o = 1$ , il y a dans ce cas contrôle d'accès par la rampe d'entrée, sinon  $r_o = r_{o,\min}$ .

$$\begin{cases}
\hat{q}_o(k) = \min \left\{ \hat{q}_{o,1}(k), \hat{q}_{o,2}(k) \right\} = \min \left\{ d_o(k) + \frac{w_o(k)}{T}, Q_o, Q_o \frac{(\rho_{\max} - \rho_{\mu,1}(k))}{(\rho_{\max} - \rho_{\mu,cr}(k))} \right\} \\
\hat{q}_{o,1}(k) = d_o(k) + \frac{w_o(k)}{T}; \quad \hat{q}_{o,2}(k) = Q_o \min \left\{ 1, \frac{(\rho_{\max} - \rho_{\mu,1}(k))}{(\rho_{\max} - \rho_{\mu,cr}(k))} \right\} \\
\Rightarrow \left[ \text{si } \rho_{cr} = \frac{\rho_{\max}}{2} - \hat{q}_{o,2}(k) = Q_o \min \left\{ 1, \frac{2(\rho_{\max} - \rho_{\mu,1}(k))}{(\rho_{\max})} \right\} \right]
\end{cases} \quad (\text{A.1.11})$$

$Q_o$ , [véh/h] - capacité de la rampe ;  $\rho_{\max}$ , [véh/km/voie] - densité maximale

### ***Fille d'attente développée***

Le débit (flux) de sortie de la rampe dépend des conditions de circulation sur la voie principale et la partie  $r_o$  de la rampe d'entrée, avec  $r_o \in [0, 1]$

$$w_{o,j}(k+1) = w_{o,j}(k) + T[\theta_{o,j}d_o(k) - \gamma_{o,j}q_o(k)], \quad [\text{véh}]; \quad (\text{A.1.12})$$

La construction d'une file d'attente est conditionnée par les 3 paramètres suivant :

- a)** le flux de trafic existant au moment  $k$  du  $j^{\text{ème}}$  segment – (la demande et la fille d'attente)
- b)** flux maximal qui pourra entrer sur la voie principale selon ses conditions initiales
- c)** le maximum de la partie venante de la rampe en tant que flux

$$\begin{cases}
q_o(k) = \min \left\{ d_o(k) + \frac{w_o(k)}{T}, Q_o r_o(k), Q_o \frac{(\rho_{\max,m} - \rho_{1,m}(k))}{(\rho_{\max,m} - \rho_{cr,m}(k))} \right\} \\
\Rightarrow \left[ \text{si } \rho_{cr} = \frac{\rho_{\max,m}}{2} - q_o(k) = Q_o \min \left\{ d_o(k) + \frac{w_o(k)}{T}, Q_o r_o(k), Q_o \frac{2(\rho_{\max,m} - \rho_{1,m}(k))}{(\rho_{\max,m})} \right\} \right]
\end{cases} \quad (\text{A.1.13})$$

$Q_o$  - capacité de la rampe

$r_o = 1$  correspond au cas du modèle simple de file d'attente.

## **Annexe 2**

### ***Méthodes de résolution des modèles de flux de trafic routier***

#### ***Par des schémas numériques***

Pour les modèles de flux de trafic routiers les méthodes numériques de résolution sont très souvent utilisées, en utilisant les schémas de discrétisation. La théorie des flux de trafic routier, reposant sur la théorie de la mécanique des fluides, montre de la même façon des phénomènes d'ondes de choc, d'éventails etc. Celles-ci, décrivent et expliquent les phénomènes rencontrés habituellement dans le processus d'écoulement des véhicules, notamment sur les autoroutes. Alors, les méthodes numériques peuvent être aussi de 1<sup>er</sup> ou de 2<sup>ème</sup> ordre toujours en utilisant les mêmes schémas de discrétisation basé sur la résolution du problème de Riemann

mais avec une exactitude élevée pour les schémas de 2<sup>ème</sup> ordre par rapport à ceux de 1<sup>er</sup>.

Alors on peut diviser les différents schémas de discrétisation spatio-temporelle [Zhang et al. (1997)], [Chanut (2005)], [Kachroo P. et al. (1998)]:

- pour les modèles du 1<sup>er</sup> ordre – schéma de Lax-Friedrichs, schéma de Godounov, Schéma numérique aux différences finies ;

- pour les modèles de 2<sup>ème</sup> ordre – schéma de Lax-Wendroff, schéma de Godounov.

**- Principe de base du Schéma de Lax-Wendroff** – la discrétisation spatio-temporelle est réalisée sur le développement en série de Taylor de l'équation différentielle. Partant de l'équation de transport (A.2.1) le flux de trafic routier est assimilé à l'écoulement d'un fluide dans un tuyau de longueur  $L$ . La discrétisation spatiale nécessite de choisir des intervalles de l'espace  $\Delta x$  de telle façon que  $L=M\Delta x$ , avec  $M$  le nombre de pas de calcul selon l'espace considéré. De la même façon, la discrétisation temporelle nécessite de diviser le temps en intervalle  $\Delta t$  de telle façon que  $T=N\Delta t$ ,  $N$  étant le nombre de pas de calcul selon le temps.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + c \frac{\partial}{\partial x} u(x,t), \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } \forall t \in [0, T] \tag{A.2.1}$$

**- Principe de base du Schéma de Godounov** [Zhang et al. (1997)], [Chanut (2005)], [Kachroo (2000)] – formation d'une grille décomposant la route en tronçon (Fig.A.2.1) de longueur  $\Delta x$  de concentration homogène sur chaque tronçon [Giorgi 2002] et en découpant le temps d'un pas de  $\Delta t$  connaissant l'état initial du système quand  $t=0$ ).

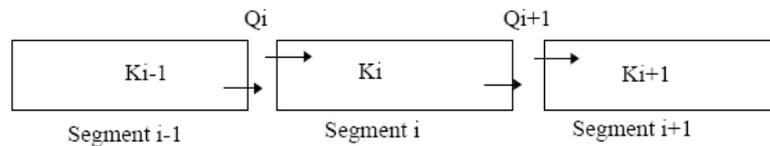


Fig. A.2.1. Schéma de Godounov – schéma de discrétisation spatio-temporelle – décomposition d'un segment en plusieurs tronçon homogènes

On suppose la concentration constante sur chaque tronçon (cellule)  $\rho(\Delta x)=const$  et débit constant durant chaque pas de temps  $q(\Delta t)=const$ . Le principe de la méthode de discrétisation est dans le calcul de la concentration pour un pas de temps et de faire la moyenne sur chaque cellule (Fig.A.2.2).

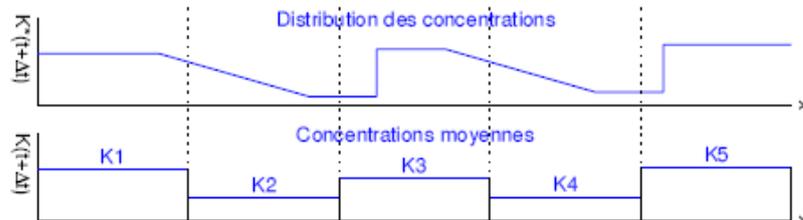


Fig. A.2.2. Schéma de Godounov – concentration moyenne par tronçon

Les conditions initiales pour exécuter la résolution par le schéma de Godounov et de calculer la moyenne de la concentration sur chaque cellule et de connaître les débits d'entrée et

de sortie sur chaque cellule pendant un pas de temps. Puisque il est plus facile de calculer le débit à la sortie de chaque cellule que la concentration, on introduit les fonctions de l'offre (*actual inflow*) et de la demande (*demanded inflow*) avec ces conditions particulières (A.2.3) comme il suit :

- offre de capacité – correspond au nombre maximal de voitures qui peuvent entrer dans une cellule dans un pas de temps;
- demande – correspond au nombre de véhicules qui souhaitent sortir d'un tronçon dans un pas de temps.

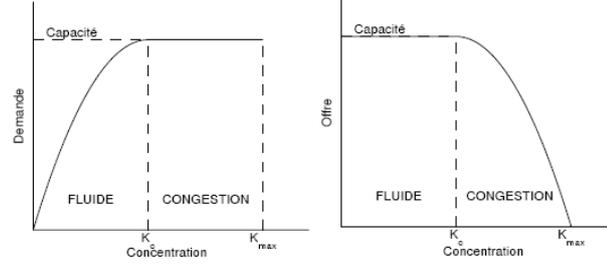


Fig.A. 2.3. Fonction d'offre et de demande en dépendance de la concentration

$$\Delta(K) = \begin{cases} Q_{eq}(K) & \text{si } K \leq K_c \\ Q_{max} & \text{si } K > K_c \end{cases} \quad \Omega(K) = \begin{cases} Q_{max}(K) & \text{si } K \leq K_c \\ Q_{eq} & \text{si } K > K_c \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

Comme ça on peut développer la forme générale de la discrétisation par le passage (A.2.3) des variables de sortie vers des variables d'entrées de chaque cellule.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{q_{in1} - q_{out1}}{L} \\ \rho_2 = \frac{q_{in2} - q_{out2}}{L} \\ \rho_3 = \frac{q_{in3} - q_{out3}}{L} \\ \dots \\ \rho_{n-1} = \frac{q_{in_{n-1}} - q_{out_{n-1}}}{L} \\ \rho_n = \frac{q_{in_n} - q_{out_n}}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_{in1} = q_{out0} \\ q_{in2} = q_{out1} \\ q_{in3} = q_{out2} \\ q_{in4} = q_{out3} \\ \dots \\ q_{in_{n-1}} = q_{out_{n-2}} \\ q_{in_n} = q_{out_{n-1}} \\ q_{in_{n+1}} = q_{out_n} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_{out1} = q_{in1} - \rho_1 L \\ q_{out2} = q_{in2} - \rho_2 L \\ q_{out3} = q_{in3} - \rho_3 L \\ q_{out4} = q_{in4} - \rho_4 L \\ \dots \\ q_{out_{n-1}} = q_{in_{n-1}} - \rho_{n-1} L \\ q_{out_n} = q_{in_n} - \rho_n L \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_{in1} = q_{out1} + \rho_1 L \\ q_{in2} = q_{out2} + \rho_2 L \\ q_{in3} = q_{out3} + \rho_3 L \\ q_{in4} = q_{out4} + \rho_4 L \\ \dots \\ q_{in_{n-1}} = q_{out_{n-1}} + \rho_{n-1} L \\ q_{in_n} = q_{out_n} + \rho_n L \end{array} \right. \quad (\text{A.2.3})$$

On remplace les flux d'entrée par des flux de sortie – le résultat obtenu sera seulement en fonction des flux de sortie et de la demande (flux d'entrée) sur le premier segment.

Pour la discrétisation spatiale nous observons le développement de la densité (A.2.4) sur chaque segment selon la loi de commande.

$$\begin{aligned}
(q_{in} - q_{out})/L &\Rightarrow \rho_5 = \frac{q_{in5} - q_{out5}}{L} \xrightarrow{q_{in5} = q_{out4}} \rho_5 = \frac{q_{in4} - \rho_4 L - q_{out5}}{L} = -\rho_4 + \frac{q_{in4} - q_{out5}}{L} \\
&= \left( -\rho_1 + \left( \frac{q_{in1} - 2q_{out2} + 2q_{out3} - q_{out4}}{L} \right) \right) + \frac{q_{in4} - q_{out5}}{L} = \\
&= \rho_1 - \left( \frac{q_{in1} - 2q_{out2} + 2q_{out3} - q_{out4}}{L} \right) + \frac{q_{in4} - q_{out5}}{L} = \\
&= \rho_1 - \left( \frac{q_{in1} - 2q_{out2} + 2q_{out3} - 2q_{out4} - q_{out5}}{L} \right)
\end{aligned} \tag{A.2.4}$$

En remplaçant pour les  $[(n-(n-2)) \text{ à } (n)]$  segments les entrées par les sorties du segment précédent on doit recevoir une dépendance (A.2.5) des densités seulement en fonction du:

- débit d'entrée sur la première section;
- des débits de sorties correspondants à chaque segment;
- de la densité du segment précédent.

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{q_{in1} - q_{out1}}{L} \\
\rho_2 &= -\rho_1 + \left( \frac{q_{in1} - q_{out2}}{L} \right) \\
\rho_3 &= -\rho_1 - \rho_2 + \left( \frac{q_{in1} - q_{out3}}{L} \right) \\
\rho_4 &= -\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \left( \frac{q_{in1} - q_{out4}}{L} \right) \\
\rho_5 &= -\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 - \rho_4 + \left( \frac{q_{in1} - q_{out5}}{L} \right) \\
&\dots \\
\rho_n &= -\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 - \rho_4 \dots - \rho_{n-1} + \left( \frac{q_{in1} - q_{outn}}{L} \right) = \left( \frac{q_{in(n-n-1)} - q_{outn}}{L} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i
\end{aligned} \right. \tag{A.2.5}$$

En fait la variable de sortie peut être remplacée par la relation des lois fondamentales du modèle de flux de trafic en exprimant le débit à partir de l'état du système (la densité) et de la vitesse (A.2.6).

$$\left. \begin{aligned}
q_{out}(t) &= \rho(t)V(\rho, t) \\
V(\rho, t) &= V_f \left( 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} \right)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow q_{out}(t) = \rho(t)V_f \left( 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} \right) \tag{A.2.6}$$

Pour chaque segment on doit remplacer la sortie par la relation qui nous donne l'état du système et de là on arrivera à trouver la sortie du modèle.

**Par des méthodes analytiques [Winckelmans G. (2007)]**

**Séparation aux variables indépendantes (A2.8) - EDP de transport de 1<sup>er</sup> ordre**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= 0, \text{ alors : } u(x,t) = V(x)W(t); \\
 \frac{\partial(V(x)W(t))}{\partial t} + \frac{\partial(V(x)W(t))}{\partial x} &= V(x)\frac{\partial W(t)}{\partial t} + W(t)\frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0; \\
 \frac{1}{W(t)}\frac{\partial W(t)}{\partial t} + \frac{1}{V(x)}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= 0; \\
 \frac{\partial W(t)}{W(t)} = \frac{\partial V(x)}{V(x)} = \text{const} &\Rightarrow \begin{cases} dV(x) + \lambda V(x) = 0 \\ dW(t) + \lambda W(t) = 0 \end{cases}; \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV(x)}{V(x)} = \lambda dx \Rightarrow \ln V(x) = \int \lambda dx \Rightarrow V(x) = e^{-\lambda x} \\ dW(t) + \lambda W(t) = 0 \Rightarrow \ln W(t) = \int \lambda dt \Rightarrow W(t) = e^{-\lambda t} \end{cases}; \\
 u(x,t) = V(x)W(t) = e^{-\lambda x} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda(x+t)}.
 \end{aligned}
 \tag{A2.8}$$

**Méthode de résolution des EDP par résolution des intégrales indépendantes (méthode des caractéristiques)** Cette méthode est utilisée surtout pour la résolution des EDP quasi-linéaires.

C'est-à-dire qu'une fois qu'on fait l'approximation de la vitesse de la façon qu'on reçoit l'EDP sous forme quasi-linéaire on peut le résoudre par la méthode des caractéristiques.

La méthode consiste à trouver une solution par un nombre d'équations intégrales indépendant. Toujours on fait une approximation de la non-linéarité dans le modèle en considérant la vitesse constante. Alors, on peut présenter sous forme vectorielle l'équation aux dérivées partielles comme suit:

Enoncée sur la méthode dans le cas générale (A2.9)-(A2.10) pour un exemple quelconque:

$$\begin{aligned}
 x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\
 \text{alors } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xy}
 \end{aligned}
 \tag{A2.9}$$

Alors on peut construire deux intégrales indépendantes l'une de l'autre (A.2.10) pour pouvoir trouver les deux inconnues par les deux équations:

$$\begin{aligned}
 1. \text{Intégrale : } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} &\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy \\
 2. \text{Intégrale : } \frac{dx}{x} = \frac{du}{xy} &\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{xy} du
 \end{aligned}
 \tag{A2.10}$$

Pour le modèle de LWR (5) : on développe l'équation du transport (de convection) (A2.11) et (A2.12).

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (2V(x,t) - V_f)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 0
 \tag{A2.11}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \left[ \begin{array}{ccc} \underbrace{1}_a & \underbrace{-V_f}_b & \underbrace{2 \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}}_c \end{array} \right] \\ \vec{n} &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} & \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} & V(x,t) \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{A2.12})$$

Si la vitesse est constante on a l'équation de la convection à vitesse constante. Dans ce cas là toutes les courbes caractéristiques solutions de cette équation sont des droites parallèles. D'ici on trouve les équations intégrales aux dérivées ordinaires du système (A2.13)- (A2.14):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{b} ; \frac{dx}{-V_f} = \frac{d\rho(x,t)}{c(x,t,V)}$$

$$\int_s^x dx = c \int_0^t dt, \quad x(s) = s, \quad t(s) = 0, \quad \text{avec I.C.} \Rightarrow \rho(x,t) = \rho(s,0) = f(s) \quad (\text{A2.13})$$

*Solution* :  $x - s = ct$

$$\rho(x,t) = f(s) = f(x - ct) = f(x - V_f t) \quad (\text{A2.14})$$

La solution de l'EDP est une famille de droites parallèles correspondant à un déplacement des véhicules à vitesse constante et nous aurions toujours un déplacement à vitesse constante de la condition initiale.

- **Méthode d'approximation de la non-linéarité dans le modèle** [Matko D. et al. (2000)], [Winckelmans G. (2007)]

La méthode d'approximation décrite ici consiste à approximer la non linéarité. C'est une étape importante, qui donne une solution particulière dans le cas où le système est considéré à l'équilibre. Cependant, nous sommes obligés d'exécuter la linéarisation de la non-linéarité. C'est-à-dire, de faire une approximation de la vitesse (A.2.15) selon les contraintes de stabilité (A.2.16) et (A.2.17) pour assurer un bon fonctionnement du processus. Tout ça pour rester dans la zone fluide sur toute la longueur et sur tout l'intervalle de temps, pour tenir la vitesse et la densité d'une valeur au-dessous de leurs valeurs critiques. Le fait d'approximation va changer le type de l'équation. D'un côté il peut se transformé dans une équation linéaire à coefficients constants où bien quasi linéaire (équation de Burger ou de diffusion).

La non-linéarité s'exprime dans le modèle de LWR par l'expression de la vitesse (A.2.15). C'est-à-dire que nous prenons un point du diagramme fondamental selon les conditions ci-dessous (A.2.16):

$$V(x,t) = V_{cg} \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right) \quad (\text{A2.15})$$

$$\left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} \right) > 0 \Rightarrow \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} < 1 \quad (\text{A2.16})$$

Pour l'exemple calculé on suppose le suivant: pour qu'on soit toujours dans la zone fluide du trafic il faut assurer (Fig.A.2.4) des valeurs de la densité du D.F. au dessous de sa valeur critique.

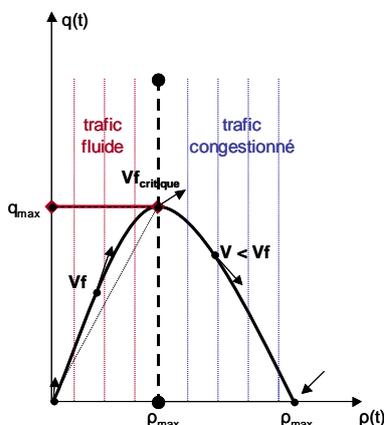


Fig.A.2.4. Choix du point du fonctionnement sur le diagramme fondamental

Alors nous pouvons définir les contraintes suivantes :

- Contrainte de limitation de la vitesse (A.2.17):

$$\rho(x, t) \leq \rho_{cr} \Rightarrow V(x, t) \leq V_{critique} \quad (A.2.17)$$

- Contrainte de limitation de la densité (A.2.18):

$$q(t) = \rho(t)V_f \left(1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}}\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{\rho(t)}{\rho_{max}}\right) < 1;$$

$$ex.: \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} = 0.9 \quad (A.2.18)$$

$$\Rightarrow q(t) = \rho(t)V_f 0.1$$

Pour obtenir une solution particulière nous pouvons nous appuyer sur les hypothèses suivantes (A.2.19):

$$\rho(x, t) < \rho_{cr}$$

$$\rho(x, t) \leq 0.5\rho_{max} \quad - DF \text{ de Greenschild}$$

$$V(x, t) \geq V_f \left(1 - \frac{0.5\rho_{max}}{\rho_{max}}\right) \geq 0.5V_f \quad (A.2.19)$$

$$V(x, t) = [V_f \div 0.5V_f]$$

$$V_{critique} = 0.5V_f$$

Le résultat (A.2.19) signifie que le point de fonctionnement du D.F. est fixé à son point critique.

Pour faire l'approximation de la non-linéarité nous pouvons utiliser les cinq cas suivant (A.2.20) – (A.2.25) [Sanwal K. et al. (1996)], [Papageorgiou (2003)]:

1. Approximation de la vitesse comme une constante (A.2.20) –  $V(x,t)=c=const$ . Nous faisons le choix d’une vitesse constante, en assurant l’état fluide du processus (A.2.18) et (A.2.19).

$$V(x,t) = c ; \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x(s) = s \\ t(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho(x(s),t(s)) = f(s) \quad (\text{A.2.20})$$

$$\int_s^x dx = c(x) \int_0^t dt \Rightarrow x - s = ct \Rightarrow s = x - ct \Rightarrow \rho(x,t) = f(x - ct)$$

La solution est un ensemble de courbes caractéristiques – réseaux de droites parallèles dont la pente correspond à une valeur de vitesse constante.

2. Approximation de la vitesse comme fonction de la variable spatiale (A.2.21) -  $V(x,t)=c(x)$ .

$$V(x,t) = c(x) ; \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c(x) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x(s) = s \\ t(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho(x(s),t(s)) = f(s) = \rho_0 e^{-s} \text{ (I.C.)} \quad (\text{A.2.21})$$

$$\int_s^x dx = c(x) \int_0^t dt \Rightarrow \int_s^x \frac{1}{c(x)} dx = \int_0^t dt \Rightarrow \log\left(\frac{x}{s}\right) = ct \Rightarrow s = xe^{-ct}$$

$$\rho(x,t) = xe^{-ct}$$

La solution est un ensemble de courbes caractéristiques – réseaux de courbes exponentielles (définies par la condition initiale) qui se déforme en se translatant dans l’espace avec une vitesse qui dépend de chaque point de l’espace.

3. Approximation de la vitesse comme fonction de la variable temporelle (A.2.22) –  $V(x,t)=c(t)$ .

$$V(x,t) = c(t) ; \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c(t) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x(s) = s \\ t(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho(x(s),t(s)) = f(s) = \rho_0 e^{-s} \text{ (I.C.)} \quad (\text{A.2.22})$$

$$\int_s^x dx = \int_0^t c(t) dt \Rightarrow x - s = \log(ct) \Rightarrow s = (x - \log ct) \Rightarrow \rho(x,t) = f(x - \log ct)$$

La solution de l’EDP représente une translation de la condition initiale (des courbes exponentielles selon la condition initiale) à une vitesse non-constante.

4. Approximation de la vitesse comme fonction de l’espace et du temps (A.2.23) -  $V(x,t)=c(x,t,\rho)$ .

$$\left. \begin{array}{l} V(x,t) = c \\ V(x,t) = c(x) \end{array} \right\} \text{la solution est analogique aux point 1. et 2.} \quad (\text{A.2.23})$$

$$V(x,t) = c(t) \quad \text{la solution est sous forme conservative}$$

5. Approximation de la vitesse – cas non-linéaire (A.2.24) –  $V(x,t)=c(\rho)$ .

$$V(x,t) = c(\rho) ; \quad \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = s \\ t(s) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \rho(s,0) = f(s) = \rho(x,t) \quad (\text{A.2.24})$$

$$\int_s^x dx = \int_0^t c(\rho(x,t)) dt - \text{solution}$$

$$x - s = f(s)t \Rightarrow \rho(x,t) = f(x - \rho(x,t)t)$$

Le fait que notre équation aux dérivées partielles est homogène, alors nous avons comme résultat la fonction  $\rho$  qui est conservée le long des caractéristiques-solutions de notre équation. Nous obtenons une vitesse  $V(x,t)=c(\rho)$  qui est conservée le long des caractéristiques. Dans le cas non linéaire nous recevrons des caractéristiques qui sont des droites dont la pente dépend de la condition initiale, qui est propagé le long de l'espace avec une vitesse constante.

La forme conservative du PDE est obtenue facilement, en intégrant tout d'abord la partie non linéaire en définissant une primitive (A.2.25) qui forme deux zones :

- où la vitesse est croissante (zone de fluidité) avec une pente croissante sur les caractéristiques  $x + dx > x$  ;
- où la vitesse est décroissante (zone de congestion-compression) avec une pente  $x + dx < x$  et les caractéristiques se croisent.

$$g(\rho) = \int^{\rho} c(\rho'(x,t)) d\rho \quad (\text{A.2.25})$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + g(\rho) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{forme conservative}$$

Après un certain temps la solution devient discontinue ce qu'on appelle une onde de choc. Le phénomène des ondes de chocs sont présent lors dans le cas d'une vitesse non-linéaire. Une fois que l'approximation est faite on arrive à la forme finale du modèle mathématique du LWR qui va être traité afin d'être résolu par les méthodes analytiques.

### Annexe 3

#### ***Méthode de résolution des EDP par la fonction de Green***

##### ***- Résolution des EDP selon la formule variationnelle de Hadamard***

Parmi les premiers qui ont traité la théorie de la méthode de la fonction de Green comme un moyen de résolution des EDP est proposé par [Butkovskij (1979)]. Il présente pour différents types d'équations différentielles, classées dans différents Groupes (selon leur degré,

homogénéité, linéarité, nombre de variables indépendantes) et donne dans une forme directe la fonction de Green, ainsi que la fonction de transfert en dépendances de contraintes imposées. Pour ses calculs il se base sur la théorie de la formule variationnelle de Hadamard pour trouver la fonction de Green. Si on a une EDP qu'on peut présenter sous forme opérationnelle de la façon suivante  $l(\rho(x,t)) = f(x,t)$ ,  $x \in D$ ,  $t > t_0$ , alors les conditions initiales et aux limites sont comme suit :  $IC(\rho(x,t)) = \rho_0(x)$  et  $BC(\rho(x,t)) = g(x,t)$ , où les fonctions  $f(x,t)$ ,  $\rho_0(x)$  et  $g(x,t)$  sont à priori définies.

On peut arriver au cas où on a des conditions initiales nulles et des conditions aux limites homogènes. Si les conditions aux limites ne sont pas homogènes il y aurait deux fonctions de Green différentes pour les deux bornes spatiales. Dans la suite on cherche une fonction dite standardisée  $w(x,t)$ , qui donne la solution homogène du EDP sous forme que  $f(x,t) = w(x,t)$ .

Il s'agit de l'équation du Groupe 1.1.1 [Butkovskij (1979)] (A.3.1, A.3.2):

$$a(x) \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} + b \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} + c(x)F(x,t) = f(x,t) \quad (\text{A.3.1})$$

$$x \geq 0, t \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0$$

Alors :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$w(x,t) = 0 - \text{fonction normalisée} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\left. \begin{aligned} l(G(x,\xi,t,\tau)) &= \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \\ w(x,t) &= \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\rho_t + V\rho_x) = \int_{t_0}^t \int_D G(x,\xi,t,\tau) w(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

On a les conditions initiales et aux limites homogènes (A.3.3):

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(x,0) &= \rho_0(x), & t &\geq 0 \\ \rho(0,t) &= \rho(L,t) = \rho(t), & 0 \leq x &\leq L \end{aligned} \right. \quad (\text{A.3.3})$$

D'ici on reçoit la fonction de normalisation pour les conditions initiales nulles et les conditions aux limites homogènes, alors la solution se limite à la résolution de l'intégrale (A.3.4):

$$\frac{\partial(\rho(x,t))}{\partial t} + b \frac{\partial(\rho(x,t))}{\partial x} = f(x,t)$$

$$b - \text{vitesse moyenne du flot des véhicules} \quad (\text{A.3.4})$$

$$w(x,t) = f(x,t) + \rho_0(x)\delta(t) + \rho_1(t)\delta(x) = f(x,t)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{b}(x-\xi)e^{-\left(\int_{\xi}^x \frac{1}{b} d(y)\right)} \delta\left(t - \int_{\xi}^x \frac{1}{b} d(y)\right) = \frac{1}{b}(x-\xi)e^{-\left(\frac{x-\xi}{b}\right)} \delta\left(t - \frac{x-\xi}{b}\right)$$

Après avoir appliquée la transformée de Laplace, on obtient pour la fonction de transfert un système distribué dont le résultat est le suivant (A.3.5) :

$$G(x,\xi,p) = \int_0^t \left( \frac{1}{b}(x-\xi)e^{-\left(\frac{x-\xi}{b}\right)} \delta\left(t - \frac{x-\xi}{b}\right) e^{-pt} \right) dt \quad (\text{A.3.5})$$

$$G(x,\xi,p) = \frac{1}{b}(x-\xi)e^{-\left(\frac{x-\xi}{b}\right)} \int_0^t \delta\left(t - \frac{x-\xi}{b}\right) e^{-pt} dt = \frac{1}{b}(x-\xi)e^{-\left(\frac{x-\xi}{b}\right)} e^{-p\left(\frac{x-\xi}{b}\right)}$$

L'approche de résolution des EDP par la fonction de Green repose sur la théorie des distributions et le produit de convolution, qui utilise la transformée de Fourier et la transformée inverse de Fourier [Duffy (2001)], [Stakgold (1979)]. Sur cette base on peut résoudre le problème, en déterminant l'inverse de convolution d'un opérateur appelée fonction de Green. Si nous cherchons la solution en un point d'une équation différentielle, alors nous pouvons présenter l'équation par le produit de cet opérateur différentielle  $D$  et la fonction solution  $\varphi(x)$  de notre équation égale à une autre fonction dite source  $j(x)$  (A.3.6), sous la condition que la source est une fonction de Dirac au même point (A.3.7):

$$D\varphi(x) = j(x) \quad (\text{A.3.6})$$

$$DG(x) = \delta(x) \quad (\text{A.3.7})$$

Il est très important de définir les conditions aux limites pour l'équation différentielle, car ils nous donnent la solution particulière, en envisageant le point de fonction dans l'espace (A.3.8).

$$\begin{aligned} (\text{A5.1}) \Rightarrow \varphi(x) &= (G * j)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)j(y)dy \\ DG(x) &= (DG * j)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [DG(x-y)]j(y)dy \quad (\text{A.3.8}) \\ (\text{A5.2}) \Rightarrow DG(x-y) &= \delta(x-y) \Rightarrow \\ DG(x) &= (DG * j)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x-y)]j(y)dy = j(x) \end{aligned}$$

D'autre côté nous devons remplacer l'opérateur différentiel contenant les coefficients de l'opérateur par une fonction, en appliquant la transformé de Fourier (et/ou de Laplace) (A.3.9) et (A.3.10):

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} p^{\alpha} = \sigma(p), \quad p^{\alpha} - \text{opérateur} \\ F(D\varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} D\varphi(x)e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} p^{\alpha} \varphi(x)e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(p)\varphi(x)e^{-ipx} dx \\ DG(x) &= \delta(x) \quad (\text{A.3.9}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} DG(x)e^{-ipx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ipx} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} p^{\alpha} G(p)e^{-ipx} dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ipx} dx \\ DG(x) = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(p)G(p)e^{-ipx} dp &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p)e^{-ipx} dp}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(p)\hat{G}(p) &= 1, \hat{G}(p) = G(x)e^{-ipx} \\
\hat{G}(p) &= \frac{1}{\sigma(p)} \\
G(x) &= F^{-1}\left\{\hat{G}(p)\right\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma(p)}\right\} \\
G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(p)} e^{ipx} dp = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix}
\end{aligned} \tag{A.3.10}$$

On calcule la transformé inverse de Fourier pour les conditions aux limites définies (A.3.11).

$$\left\{ \begin{aligned}
D\varphi(x) &= (DG * j)(x) = \left( \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} \right) * j \right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} j(y) dy = j(x) \\
\varphi(x) &= (G * j)(x) = \left( \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} \right) * j \right)(x) = \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} \right) \int_0^x u(y) dy = \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} \right) x \\
Laplace : \Phi(p) &= \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\sigma(x)} e^{ix} \right) x e^{-pt} = x \frac{1}{\sigma(x)} e^{x-pt}
\end{aligned} \right. \tag{A.3.11}$$

Pour les conditions IC et BC on a (A.3.12) et (A.3.13):

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \delta(x-x_0)\delta(t-\tau) \\
l(G(x,x_0,t,\tau)) &= \delta(x-x_0)\delta(t-\tau) \\
IC(G(x,x_0,t,\tau)) &= 0 \\
BC(G(x,x_0,t,\tau)) &= 0
\end{aligned} \tag{A.3.12}$$

$$\rho(x,t) = \int_{t_0}^t \int_D G(x,x_0,t,\tau) w(x_0,\tau) dx_0 d\tau \tag{A.3.13}$$

Puisque la théorie se base sur l'utilisation des fonctions de Dirac dans la solution par la fonction de Green, on présente les propriétés de la fonction impulsionnelle, en tant qu'une fonction distribuée qui est linéaire et continue dans un espace pluridimensionnel défini. Plus loin on utilise la transformé de Laplace donnant une allure achevée de notre problème qui se consistait dans l'obtention d'une fonction de transfert présentant le problème distribué.

Groupes (1.1.1) présente des EDP de premier ordre soit-ils linéaires ou non-linéaires par quatre cas particulier parmi lesquels on retrouve l'équation du transport (A.3.14) - (A.3.17)

$$a(x) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + b \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + c(x) Q(x,t) = f(x,t) \Rightarrow \begin{cases} I.C. \rightarrow Q(x,0) = Q_0(x) = 0 \\ B.C. \rightarrow Q(0,t) = Q(L,t) = g(t) = 0 \\ x \geq 0, t \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0 \end{cases} \tag{A.3.14}$$

Sous forme directe analytique nous avons :

- la fonction normalisée

$$w(x,t) = f(x,t) + a(x) Q_0(x) \delta(t) + b g(t) \delta(x) \tag{A.3.15}$$

- la fonction de Green

$$G(x,x_0,t) = 1(x-x_0) \frac{1}{b} e^{-\int_{x_0}^x \frac{c(y)}{b} dy} \delta \left( t - \int_{x_0}^x \frac{a(y)}{b} dy \right) \tag{A.3.16}$$

- la fonction de transfert

$$W(x, x_0, p) = 1(x - x_0) \frac{1}{b} e^{-\frac{1}{b} \int_{x_0}^x [a(y)p + c(y)] dy} \quad (\text{A.3.17})$$

### - Propriétés de la fonction de Dirac

Dans la recherche d'une solution d'une équation différentielle, en utilisant la fonction de Green nous utilisons la théorie des distributions d'une source potentielle de type fonction de Dirac. Cette dernière possède les propriétés suivantes très utiles [Duffy (2001)]

(A.3.24)

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \left| \delta(cx) = \frac{\delta(x)}{|c|}, \delta(x) = -x\delta'(x), \quad \left| \delta(c(x-\xi)) = \frac{\delta(x-\xi)}{|c|}, \right. \right. \quad (\text{A.3.24})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(x) dx = f(\xi) \Rightarrow \delta(x-\xi) = \frac{d}{dx} H(x-\xi) \Rightarrow H(x-\xi) = \int_{-\infty}^x \delta(x_0 - \xi) dx_0$$

D'ici nous pouvons dire que la fonction de Green est une méthode de recherche d'une solution des équations différentielles non homogènes. Dans le cas des équations linéaires se présentant sous la forme  $Lx=f$ , nous avons  $L$ -opérateur différentiel linéaire de  $x$  – la variables indépendante,  $f(x)$  – une fonction connue et  $u(x)$  – la solution que nous devons obtenir. Nous pouvons la trouver, comme une suite de fonctions qui satisfaites les conditions  $Lx=\lambda f$ ,  $\lambda$  – constante arbitraire. La méthode se consiste à trouver la solution du EDP quand  $Lg=\delta(x-\xi)$ ,  $\xi$  – point arbitraire de l'espace. La solution de  $u(x)$  est donnée par une intégrale qui contient la fonction de Green  $g(x, \xi)$  et  $f(\xi)$ .

Si on prend l'exemple d'un circuit électrique (A.3.25):

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v(t) \quad (\text{A.3.25})$$

On a IC –  $\frac{V_0}{\Delta\tau}$  qui commence à  $t = \tau$

Pour  $t > \tau + \Delta\tau$  on a solution de l'équation homogène (A.3.26):

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$d'où : i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, t > \tau + \Delta\tau \quad (\text{A.3.26})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v(t) dt = V_0$$

Pour  $\tau < t < \tau + \Delta\tau$  on a solution générale non homogène (A.3.27):

$$\begin{aligned}
L \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} di + R \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} i(t) dt &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v(t) dt \\
L[i(\tau + \Delta\tau) - i(\tau)] + R \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} i(t) dt &= V_0, \\
R \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} i(t) dt &= 0 - \text{pour } \Delta\tau \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{A.3.27}$$

$$i(\tau) = 0 \text{ et } i(\tau + \Delta\tau) = I_0 e^{-R \frac{(\tau+\Delta\tau)}{L}} \approx I_0 e^{-R \frac{\tau}{L}}$$

d'où on reçoit :

$$L I_0 e^{-R \frac{\tau}{L}} = V_0 \text{ alors pour } I_0 = \frac{V_0}{L} e^{R \frac{\tau}{L}}$$

On peut donner la solution générale sous la forme (A.3.28):

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \frac{V_0}{L} e^{-R \frac{(t-\tau)}{L}}, & t \geq \tau \end{cases} \tag{A.3.28}$$

Si nous supposons, que pendant tout l'intervalle de temps nous avons à chaque  $\Delta\tau$  un impulse d'amplitude  $\frac{V_i}{\Delta\tau}$ , alors la réponse est sous la forme suivante (A.3.29):

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0 \\ \frac{V_0}{L} e^{-R \frac{(t-\tau_0)}{L}}, & \tau_0 < t < \tau_1 \\ \frac{V_0}{L} e^{-R \frac{(t-\tau_0)}{L}} + \frac{V_1}{L} e^{-R \frac{(t-\tau_1)}{L}}, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=0}^N \frac{V_i}{L} e^{-R \frac{(t-\tau_i)}{L}}, & \tau_N < t < \tau_{N+1} \end{cases} \tag{A.3.29}$$

D'où nous avons (A.3.30):

$$\begin{aligned}
i(t) &= \int_{\tau}^t \frac{v(\tau)}{L} e^{-R \frac{(t-\tau)}{L}} d\tau \\
i(t) &= \int_{\tau}^t v(\tau) \left( \frac{e^{-R \frac{(t-\tau)}{L}}}{L} \right) d\tau = \int_{\tau}^t v(\tau) g(t|\tau) d\tau \\
g(t|\tau) &= \left( \frac{e^{-R \frac{(t-\tau)}{L}}}{L} \right) m \quad \tau < t - \text{fonction de Green}
\end{aligned} \tag{A.3.30}$$

Pour résoudre la fonction de Green, en utilisant la fonction de Dirac, il faut se limite dans la résolution de l'équation sous les conditions initiales comme suit :

$L \frac{dg}{dt} + Rg = \delta(t - \tau)$ ,  $g(0 | \tau) = 0$ , en appliquant la transformée de Laplace on reçoit l'expression de la fonction de Green dans le plan complexe sous forme d'une fonction de transfert pour le modèle d'un circuit électrique. C'est la même procédure et nous pouvons raisonner et suivre la même logique dans le cas d'un modèle de flux de trafic car finalement nous nous retrouvons sur une équation différentielle similaire.

- ***Etapas de la résolution des EDO par la fonction de Green***

La méthode consiste à passer par les étapes suivantes pour le cas des EDO:

- Nous avons un EDO dont  $y(t)$  est solution, dépend d'une seule variable indépendante  $t$  et dont la partie droite est une fonction  $f(t)$
- La fonction de Green donne la solution de EDO selon les conditions initiales où les valeurs de  $y(t)$  et ses dérivées sont nulles pour  $t=0$ .
- Par la transformée de Laplace nous trouvons la forme opérationnelle et la transformée de Laplace de la fonction originale  $y(t)$ . Ca veut dire que tout dépend de  $f(t)$ .
- Si on note que  $Y(p)=F(p)G(p)$ , où  $G(p)$  est une fonction, alors la transformée inverse de Laplace nous donnera la fonction  $g(t)$
- Par le théorème de convolution (appliquant la transformée de Fourier – changement de variables) on reçoit  $y(t) = \int_0^t g(t-x)f(x)dx$  où  $g(t)$  est la fonction de Green
- Plus loin nous prenons les conditions initiales homogènes (condition nulle). Dans le cas contraire, il faut trouver une solution homogène qui satisfaites les CI et après introduire cette solution dans la solution non homogène.
- Nous remplaçons la fonction de l'EDO de base par la fonction de Green  $g(t)$  pour le cas non homogène où nous avons une impulsion appliquée au moment  $t=\tau$ , après le moment initiale  $t=0$ .

- ***Solution de l'équation d'onde du deuxième ordre par la méthode de la fonction de Green***

Dans le Ch.3 de [Duffy (2001)], l'auteur donne la solution de l'équation d'onde du deuxième ordre (A.3.30) suivante :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \Rightarrow t, \tau \geq 0 \tag{A.3.30}$$

En utilisant le transformée de Laplace (pour les conditions initiales nulles  $g(x,0) = g_0(x) = 0$ ) (A.3.31) :

$$s^2 G + c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = c^2 \delta(x - \xi) e^{-s\tau} \tag{A.3.31}$$

Pour résoudre (A3.31) nous devons utiliser la transformé de Fourier (pour les conditions aux limites homogènes  $g(0,t) = g(L,t) = g(t)$ ) pour obtenir une équation algébrique de type

(A.3.32).

$$\bar{G}(x, \xi, t, \tau) = c^2 \frac{e^{(-ik\xi - s\tau)}}{c^2 k^2 + s^2} \quad (\text{A.3.32})$$

Alors trouve la solution finale de la fonction de Green en résolvant l'intégrale de type Fourier (la transformée inverse) (A.3.33)

$$G(x, \xi, t, \tau) = \frac{e^{(-s\tau)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \frac{e^{-ik(x-\xi)}}{c^2 k^2 + s^2} dk \quad (\text{A.3.33})$$

Comme résultat final de l'équation d'onde du deuxième ordre est une fonction retard (fonction irrationnelle) qui dépend à la fois de toutes les variables spatiales ( $x, \xi$ ) et temporelles ( $t, \tau$ ), ainsi que de la constante  $c$  (la vitesse).

## Annexe 4

### *Stratégies de commandes*

#### - *Stratégie ALINEA discrète :*

**Le modèle discrète est présenté par** les équations (A.4.2.a) à partir de (A.4.1).

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\frac{dq}{dx} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L}(q_{in} - q_{out} + r) \quad (\text{A.4.1})$$

$$\frac{\rho(k+1) - \rho(k)}{T} = \frac{(q_{in}(k) - q_{out}(k) + r(k))}{L} \quad (\text{A.4.2.a})$$

D'ici la sortie du système discrète est sous la forme (A.4.2.b)

$$\rho(k+1) = \rho(k) + \frac{T}{L}(q_{in}(k) - q_{out}(k) + r(k)) \quad (\text{A.4.2.b})$$

Le schéma correspondant du modèle du système est présenté par la Fig. A.4.3.

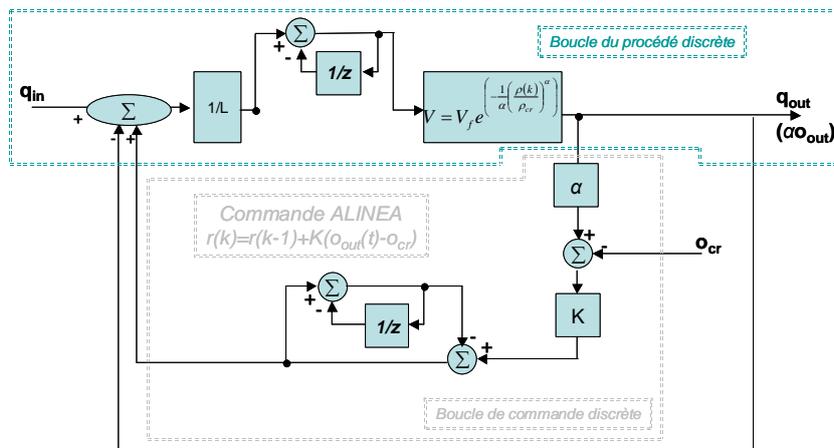


Fig. A.4.3. Schéma bloc de la commande par rampe d'entrée Stratégie ALINEA

Cette commande correspond à un régulateur de type I (intégrateur), mais également on pourra réaliser une commande de type PI ou PID en dépendance des conditions et les contraintes

imposées. Tout cela va apparaître comme différence dans l'expression de  $r(t)$ .

Si on examine l'équation de la commande issue de la stratégie ALINEA [Papageorgiou (1991), [Papageorgiou (1998)] on peut voir que l'équation du flux versé est celui venant en amont sur la voie principale dans un temps  $k$  (A.4.3):

$$r(k) = r(k-1) + R_k[\hat{o}-o_{out}(k-1)] \quad (\text{A.4.3})$$

- **Stratégie coordonnée METANET (suite) :**

Quand le nœud  $n$  a plus d'un lien partant, la densité virtuelle en aval est (A.4.4) :

$$\rho_{m,Nm+1}(k) = \frac{\sum_{\mu \in on} \rho_{\mu,1}^2(k)}{\sum_{\mu \in on} \rho_{\mu,1}} \quad (\text{A.4.4})$$

Où  $on$  est le lien sortant du nœud  $n$ .

Quand le nœud  $n$  a plusieurs liens sortants, la vitesse virtuelle en amont  $v_{m,o}(k)$  de lien sortant  $m$  est (A.4.5):

$$v_{m,o}(k) = \frac{\sum v_{\sigma,N\mu}(k) q_{\mu,N\mu}(k)}{\sum_{\mu \in in} q_{\mu,N\mu}(k)} \quad (\text{A.4.5})$$

Alors, pour la vitesse en amont on a : un nœud entrant  $n$  d'origine la vitesse virtuel  $v_{\mu}(k)$  d'origine peut être spécifié par l'utilisateur, où  $\mu$  est l'index d'origine. Si  $v_{\mu}(k)$  n'est pas spécifié alors elle égale à la vitesse du premier segment du lien partant (A.4.6) (Fig.A.4.4).

$$v_{\mu}(k) = v_{m,1}(k). \quad (\text{A.4.6})$$

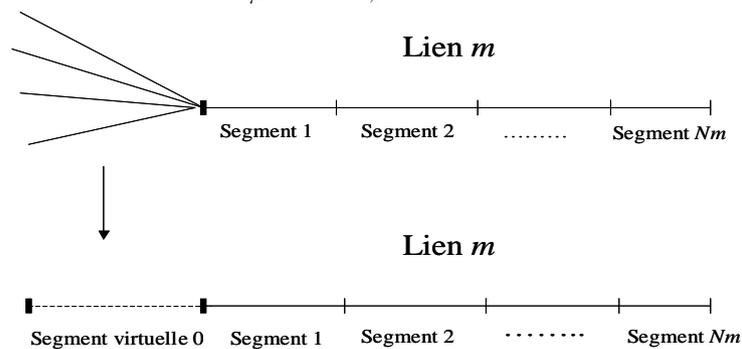


Fig. A.4.4. Un nœud avec un lien sortant  $m$  et quelques liens entrants. Les vitesses du dernier segment du lien entrant sont liées dans une vitesse virtuelle en amont  $v_{m,o}(k)$  [Hegyi (2004)]

S'il y a un deuxième lien entrant sans compter l'origine, alors la vitesse du dernier segment du second lien entrant, est prise pour  $v_{m,o}(k)$ .

Pour le contrôle de la densité en aval : nous avons la densité virtuel en avale du lien entrant  $m$  d'un nœud relié à une destination, est calculée comme suit: d'abord, l'utilisateur peut spécifier la destination de la densité  $\rho_{\mu}(k)$  où  $\mu$  est l'index du lien de destination. Un flux limité  $q_{limi}(k)$  peut être défini, et la densité virtuelle en aval est calculée selon (A.4.7)

$$\rho_{\mu}(k+1) = \begin{cases} \rho_{amont}(k) & \text{si } q_{\mu} < q_{limit}(k) \text{ et } \rho_{amont}(k) < \rho_{criti,\mu} \\ \rho_{\mu}(k) + C_{\mu}(q_{\mu}(k) - q_{limit}(k)) & \\ \text{autrement} & \end{cases} \quad (\text{A.4.7})$$

où  $\rho_{amont}(k)$  est la densité du lien sortant et  $C_{\mu}$  est un paramètre. Si  $\rho_{\mu}(k)$  est différent  $q_{limit}(k)$  est défini comme  $\rho_{\mu}(k) = \rho_{m,Nm}(k)$  et s'il y a un second lien sortant de nœud n alors la densité du premier segment est pris pour  $\rho_{m,i+1}$ .

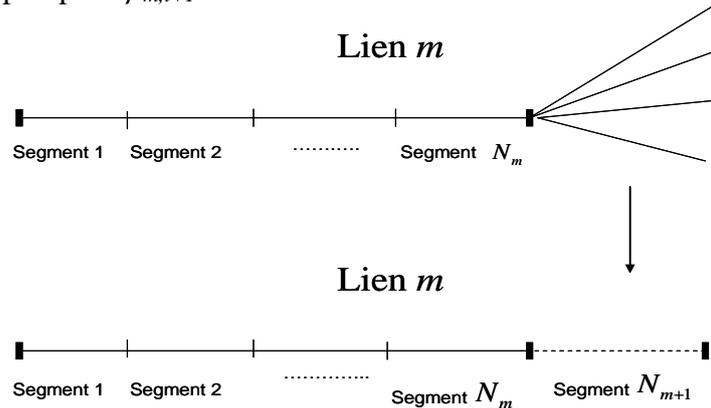


Fig.A.4.5. Un nœud avec un lien entrant et quelques liens sortant. La densité du premier segment du lien sortant est notée comme densité virtuelle en aval [Hegyi (2004)]

### - Principe de la commande plate -

La théorie de la commande plate est un moyen puissant de commande des processus. Il s'agit de trouver la sortie du système appelée sortie plate, qui dans la suite doit être transformée jusqu'à l'obtention du modèle sous forme d'espace d'état. La théorie de la platitude est une méthode de commande qui a été appliquée sur les systèmes de flux de trafic routiers [109-111][Fliess M. et al. (1992)], [Martin P. et al. (1992)], [Fliess M. et al. (1995)], [Abouaissaet H. al. (2006)] qui est appropriée aux systèmes non-linéaires, car on regarde sur la stabilité du système non-linéaire, en utilisant les critères d'observabilité. En utilisant les méthodes numériques de résolution et en lui ajoutant une commande plate dans le cas d'un système non-linéaire, en fait on cherche un point de fonctionnement au voisinage d'un ensemble de solutions ce qui exprime en fait et la non-linéarité dans le modèle de cet ensemble de solution autour d'une courbe nominale. Le passage de variable (A.4.8) est le suivant :

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_i \\ \dot{y}_1 = \dot{x}_i \\ y_2 = \dot{x}_{i-1} = \dot{y}_1 \\ \dots \\ y_{i-1} = \dot{x}_1 = \dot{y}_i \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \dots \\ x_{i-1} = x_i \end{array} \right. \rightarrow \quad (\text{A.4.8})$$

Dans notre cas concret la variable d'état est la dérivée de la densité et de la sortie plate

c'est la densité sur le dernier segment pour le modèle LWR.

Après avoir réalisé la discrétisation spatiale, par découpage en plusieurs tronçons, nous recevrons plusieurs tronçons et plusieurs équations d'état du système (A.2.7).

## Annexe 5

### *Méthodes d'approximations rationnelles*

#### - *Méthode d'approximation rationnelle d'une fonction irrationnelle du type:*

$$f(t) = \delta(t - a) \Rightarrow F(p) = e^{-ap}$$

La fonction de type retard est une fonction est irrationnelle qui ne peut pas être utilisée sous forme directe dans le domaine de Matlab/Simulink. Alors il nous faut une approximation rationnelle qui pourra se faire par les approches suivantes [Nikolov (2002)]:

1. *Approximation en utilisant la formule d'Euler* –  $e^{-at} = \cos(at) - j \sin(at)$
2. *Approximation utilisant les séries :*

#### *a. La série de Taylor (A.5.1):*

$$e^{pt} = e^a \left( 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{6} + \dots \right) = e^a \sum_{k=0}^N \left( 1 + \frac{(pt-a)^k}{\Gamma(k+1)} \right) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N 1 + \frac{(pt-a)^k}{\Gamma(k+1)}} \quad (\text{A.5.1})$$

Exemple de calcul (A.5.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow e^{-at} = \frac{1}{1+(pt-a)} \quad \left| \quad k=2 \Rightarrow e^{-at} = \frac{2}{2+2(pt-a)+(pt-a)^2} \\ k=3 \Rightarrow e^{-at} = \frac{6}{6+6(pt-a)+3(pt-a)^2+(pt-a)^3} \end{array} \right. \quad (\text{A.5.2})$$

#### *b. La série de Mac Loren (A.5.3):*

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{at} = 1 - (at) + \frac{(at)^2}{2} - \frac{(at)^3}{6} + \frac{(at)^4}{24} - \dots = \sum_{k=0}^N 1 + \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} \\ e^{-at} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N 1 + \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow e^{-at} = \frac{1}{1+(at)} \quad \left| \quad k=2 \Rightarrow e^{-at} = \frac{2}{2+2(at)+(at)^2} \\ k=3 \Rightarrow e^{-at} = \frac{6}{6+6(at)+3(at)^2+(at)^3} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.5.3})$$

#### *c. La série de Padé (A.5.4):*

$$e^{-pt} = \frac{A_m(p)}{B_n(p)} = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2m-k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} (pt)^k}{\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2n-k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} (pt)^k}, \begin{cases} n = m - \text{série symétrique} \\ n \neq m - \text{série asymétrique} \end{cases} \quad (\text{A.5.4})$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{-pt} = 1 \quad \left| \quad k = 1 \Rightarrow e^{-pt} = \frac{1 - \frac{tp}{2}}{1 + \frac{tp}{2}} \quad \right| \quad k = 2 \Rightarrow e^{-pt} = \frac{1 - \frac{tp}{2} + \frac{(tp)^2}{12}}{1 + \frac{tp}{2} + \frac{(tp)^2}{12}}$$

3. **La série polynomiale : de N-nombre de cellules du type (A.5.5):**

$$e^{-tp} = \prod_{k=1}^N \frac{k^k}{(k+tp)^k}$$

$$N = 1 \Rightarrow \frac{1^1}{(1+tp)} \quad \left| \quad N = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{(2+tp)^2} \quad \right| \quad N = 3 \Rightarrow \frac{3^3}{(3+tp)^3} \quad \left| \quad \dots \quad \right| \quad N = N \Rightarrow \frac{N^N}{(N+tp)^N}$$

$$N = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{(2+tp)^2} = \frac{4}{(2+tp)(2+tp)} \quad (\text{A.5.5})$$

$$N = 3 \Rightarrow N = 3 \Rightarrow \frac{3^3}{(3+tp)^3} = \frac{27}{(3+tp)(3+tp)(3+tp)}$$

...

#### - **Approximation d'un opérateur non-entier avec une fonction continu**

Les opérateurs non-entiers sont utilisés pour obtenir des performances améliorées dans le fonctionnement des systèmes et des processus, mais pour pouvoir les réaliser réellement, en utilisant des logiciels de simulations, il est nécessaire de trouver leur analogue rationnel. En générale les différences

**Qu'est-ce qui diffèrent les opérateurs entiers par les opérateurs non-entiers ? (A.5.6)**

$$G(p) \Rightarrow G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$G(p)^{\pm\beta} = p^{\pm\beta} \Rightarrow G(j\omega)^{\pm\beta} = (j\omega)^{\pm\beta} = (|\omega|)^{\pm\beta} e^{\pm\beta j \frac{\pi}{2}}; (\beta = \overline{1, n}) \quad (\text{A.5.6})$$

$$G(p)^{\pm\alpha} = p^{\pm\alpha} \Rightarrow G(j\omega)^{\pm\alpha} = (j\omega)^{\pm\alpha} = (|\omega|)^{\pm\alpha} e^{\pm\alpha j \frac{\pi}{2}}; (1 < \alpha < 2)$$

#### 1) **Fractions enchainées continues**

La propriété générale des fractions continues est dans l'analyse et l'observation de la stabilité des systèmes linéaires. Alors si on a une fonction irrationnelle G (p), on peut la remplacer avec une autre fonction linéaire du type (A.5.7) :

$$G(p) \Rightarrow \hat{G}(p) = a_0(p) + \frac{b_1(p)}{a_1(p) + \frac{b_2(p)}{a_2(p) + \frac{b_3(p)}{a_3(p) + \frac{b_4(p)}{a_4(p) + \dots}}} \quad (\text{A.5.7})$$

2) **Approximation avec une fonction de type :**

$$G(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\rho T}\right)^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{A.5.8})$$

3) **Approximation avec couple de polynômes non-symétriques :**

Pour les basses fréquences (A.5.9) et pour les hautes fréquences (A.5.10) :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + pT)^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{A.5.9})$$

$$G(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^\alpha, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{A.5.10})$$

4) **Approximation avec une fonction de type (A.5.11) :**

$$\left\{ \begin{array}{l} G(p)^{\pm\alpha} \Rightarrow \hat{G}(p), \quad 1 < \alpha < 2 \\ \hat{G}(p) = a_0 + \frac{p-p_0}{a_1} \frac{p-p_1}{a_2} \frac{p-p_2}{a_3} \dots, \\ p_k = \overline{1, n} - \text{poins dans lesquels on va approximer} \\ \text{où : } a_i = \mathcal{G}_{i+1}(p_i), \quad \mathcal{G}_{i+1}(p) = \frac{p-p_i}{\mathcal{G}_i(p) - a_i} \\ \hat{G}(p) = \mathcal{G}_0(p) \end{array} \right. \quad (\text{A.5.11})$$

5) **Approximation de la  $\alpha$ -ème racine :** on reçoit un polynôme basé sur les relations (A.5.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} H(p) = (G(p))^\alpha, \quad 1 < \alpha < 2; \quad \alpha = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad m = \frac{q}{2}; \\ H_1(p) = H_0(p) \frac{(q-m)(H_0(p))^2 + (q+m)G(p)}{(q+m)(H_0(p))^2 + (q-m)G(p)} \\ H_2(p) = H_1(p) \frac{(q-m)(H_1(p))^2 + (q+m)G(p)}{(q+m)(H_1(p))^2 + (q-m)G(p)} \\ \dots \\ H_i(p) = H_{i-1}(p) \frac{(q-m)(H_{i-1}(p))^2 + (q+m)G(p)}{(q+m)(H_{i-1}(p))^2 + (q-m)G(p)} \end{array} \right. \quad (\text{A.5.12})$$

Exemple d'énoncé (A.5.13), de calcul (A.5.14):

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0.5; q = 2; m = 1; \\ H_0(p) = 1; G(p) = \frac{1}{p} \end{array} \right\} \Rightarrow H_1(p) = H_0(p) \frac{(q-m)(H_0(p))^2 + (q+m)G(p)}{(q+m)(H_0(p))^2 + (q-m)G(p)} \quad (\text{A.5.13})$$

$$\Rightarrow H_1(p) = (1) \frac{1(1)^2 + 3 \frac{1}{p}}{3(1)^2 + \frac{1}{p}} = \frac{p+3}{3p+1} = \frac{p^2+3p}{3p^2+p};$$

$$\Rightarrow H_2(p) = \left( \frac{p^2+3p}{3p^2+p} \right) \frac{1 \left( \frac{p^2+3p}{3p^2+p} \right)^2 + 3 \frac{1}{p}}{3 \left( \frac{p^2+3p}{3p^2+p} \right)^2 + \frac{1}{p}} \quad (\text{A.5.14})$$

$$\Rightarrow H_3(p) = H_2(p) \frac{\left( H_2(p) \right)^2 + 3 \frac{1}{p}}{\left( 3 \left( H_2(p) \right)^2 + \frac{1}{p} \right)}$$

Comme résultat des simulations pour les trois opérateurs (intégrateur I, différentiateur D et intégro-différentiateur ID) en utilisant l'algorithme (A.5.14). Sur les caractéristiques on obtient le gabarit généralisé (gabarit horizontal sur le lieu de Bode) qui se forme autour de la fréquence de coupure qui améliore les performances des systèmes dans ce diapason :

- Opérateur intégrateurs (Fig.A.5.1) :

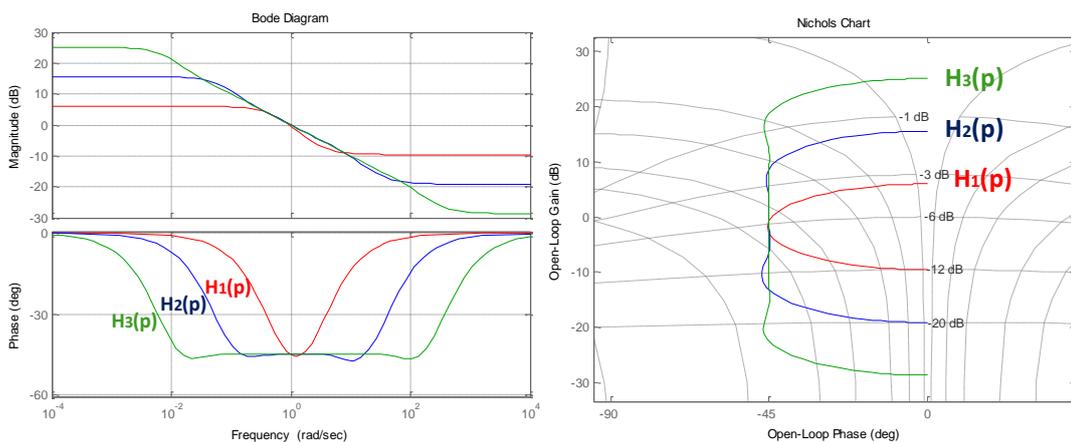


Fig.A.5.1. Diagramme de Bode et plan de Black-Nichols pour un opérateur *intégrateur* approximé en utilisant de la  $\alpha$ -*ème* racine pour les résultats obtenus de (A.5.14)

- Opérateur différentiateurs (Fig.A.5.2)

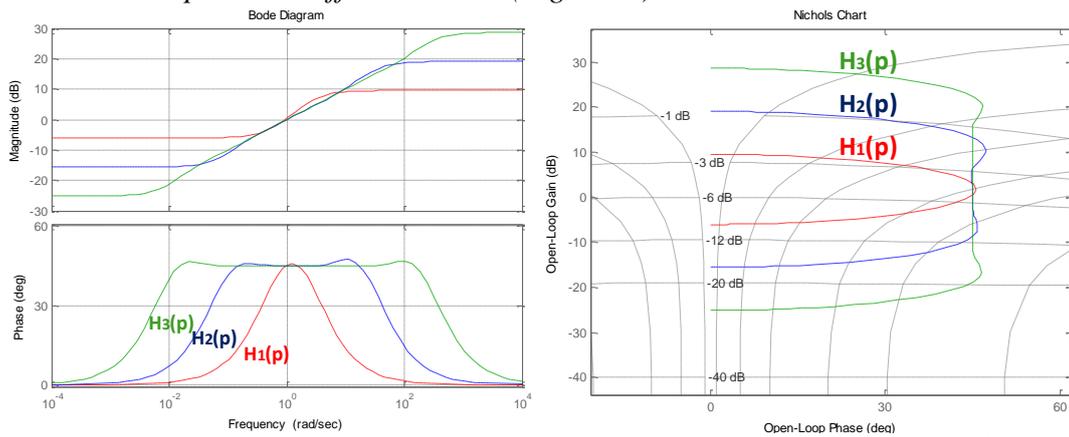


Fig.A.5.2. Diagramme de Bode et plan de Black-Nichols pour un opérateur différentiateur approximé en utilisant de la  $\alpha^{-ème}$  racine pour les résultats obtenus de (A.5.14)

- Opérateur intégro-différentiateur (Fig.A.5.3)

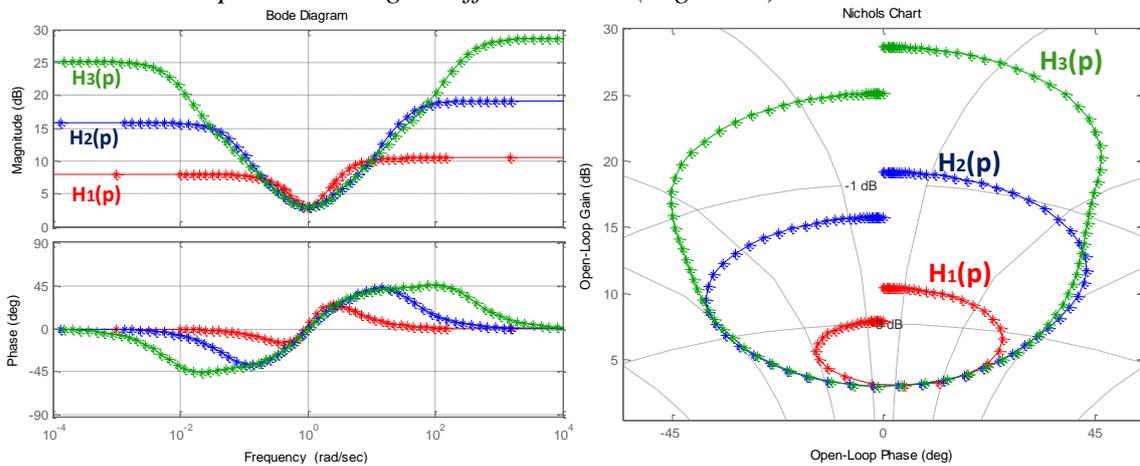


Fig.A.5.3. Diagramme de Bode et plan de Black-Nichols pour un opérateur intégro-différentiateur approximé en utilisant la  $\alpha^{-ème}$  racine pour les résultats obtenus de (A.5.14)

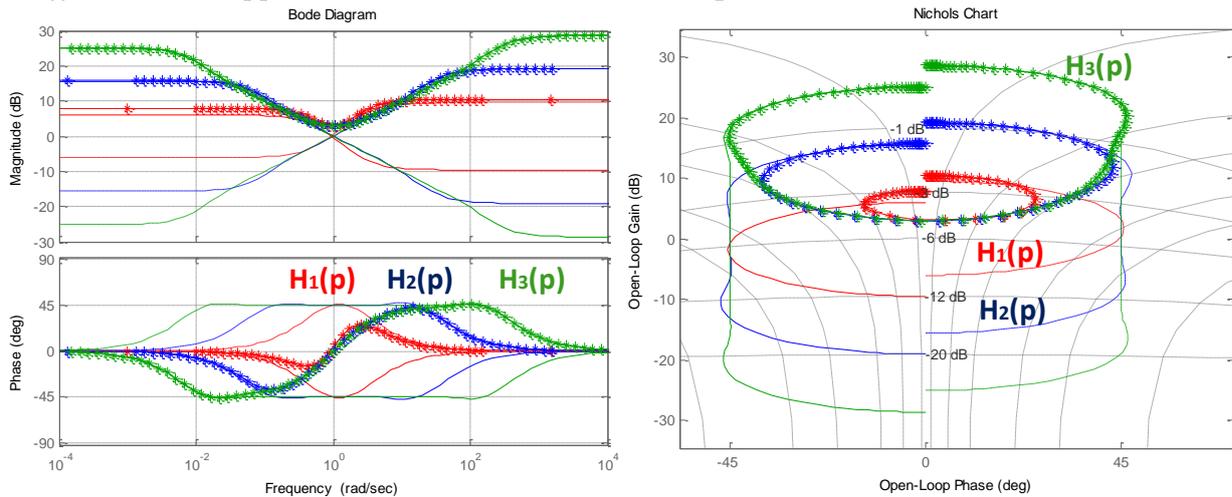


Fig.A.5.4. Diagramme de Bode et plan de Black-Nichols pour l'ensemble des algorithmes I, D et ID approximés en utilisant de la  $\alpha^{-ème}$  racine pour les résultats obtenus de (A.5.14)

6) Approximation d'Alain Oustaloup – est développée dans le Chapitre 4 et l'Annexe 6

## Annexe 6

### **Commande d'ordre non-entière (CRONE) proposé par Alain [Oustaloup (1998)]**

Dans ces ouvrages Alain Oustaloup [Oustaloup (1994)] propose une méthode fréquentielle d'approximation des algorithmes non-entier pour obtenir une commande qu'on appelle CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non-Entier). On peut faire une approximation des algorithmes classiques – intégrateur, différentiateur, intégro-différentiateur en utilisant des séries polynomiales, soit-elles symétriques ou non-symétrique. La méthode montre qu'il existe un lien entre la dérivation (respectivement intégration) non-entière et récursive. Alors dans la méthode nous réalisons un système à réponse fréquentielle récursive avec une distribution récursive des zéros et les pôles [Oustaloup A. et al. (1999)], [Canat (2005)], [Nikolov (2005)], [Benova (2006)] (A.6.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} G(p) = (p)^\alpha - \text{fonction irrationnelle} \Rightarrow \hat{G}(p) = C \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{1 + \frac{p}{\omega_i}} - \text{fonction rationnelle} \end{array} \right. \quad (\text{A.6.1})$$

Pour obtenir les fréquences dans les polynômes dans le numérateur et dénominateur de chacune des cellules de l'approximation proposé par A. Oustaloup [1998] on utilise la relation (A.6.2)

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \eta; \frac{\omega_i}{\omega_i} = \lambda; \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \eta\lambda; \alpha = \frac{\log \lambda}{\log(\lambda\eta)} \quad (\text{A.6.2})$$

La méthode d'obtention des algorithmes rationnels des régulateurs non-entiers se base au critère de synthèse suivant : l'invariance des marges de stabilités (dans le domaine fréquentielles se sont les marges de gain et de phase qui sont observé sur les lieux de Nyquist, Bode et Black-Nichols). Il s'agit d'une approximation rationnelle d'une fonction qui est d'ordre non-entier et qui est de type irrationnelle. Pour l'approximation nous utilisons un modèle polynomiale de type cellulaire, en utilisant  $n$ -nombre de cellule de type intégro-différentielle. Leur rôle c'est d'obtenir un diapason fréquentielle, dans lequel les marges de stabilités (marges de gain et de phase) sont invariables (ont une valeur constante). Ce diapason est connu souvent comme gabarit verticale (dans le lieu de Black-Nichols) et gabarit horizontale (dans le lieu de Bode) et il se présent comme une droite (entre les deux limite fréquentiels du diapason) de la caractéristique du système dans le lieu de Nyquist. Ce gabarit a une valeur prédéfinie de la phase du régulateur qui dépend du rapport fréquentiel de chaque cellule et indirectement dépend de l'ordre non-entier de synthèse du régulateur. La largeur du gabarit dépend proportionnellement aux nombres des cellules que nous utilisons dans l'approximation de synthèse du régulateur. En fait, chaque cellule a la même phase, mais ce qui change c'est la valeur de la fréquence de coupure, comme ça nous obtenons comme résultat le même profil pour chaque cellule mais décalé d'une certain valeur de sa fréquence de coupure. Nous pouvons l'observer dans les différents lieux

fréquentielles (Fig. A.6.1).

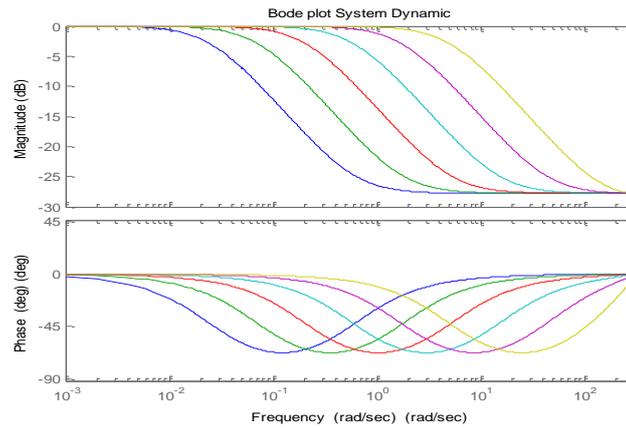


Fig. A.6.1. Diagramme de Bode d'un régulateur intégrale non-entier, approximation avec 6 cellule de type intégro-différentielle

La propriété générale, des algorithmes non-entiers approximé par les méthodes polynomiales, se consiste dans l'invariance des performances de stabilité (Fig.A.6.2):

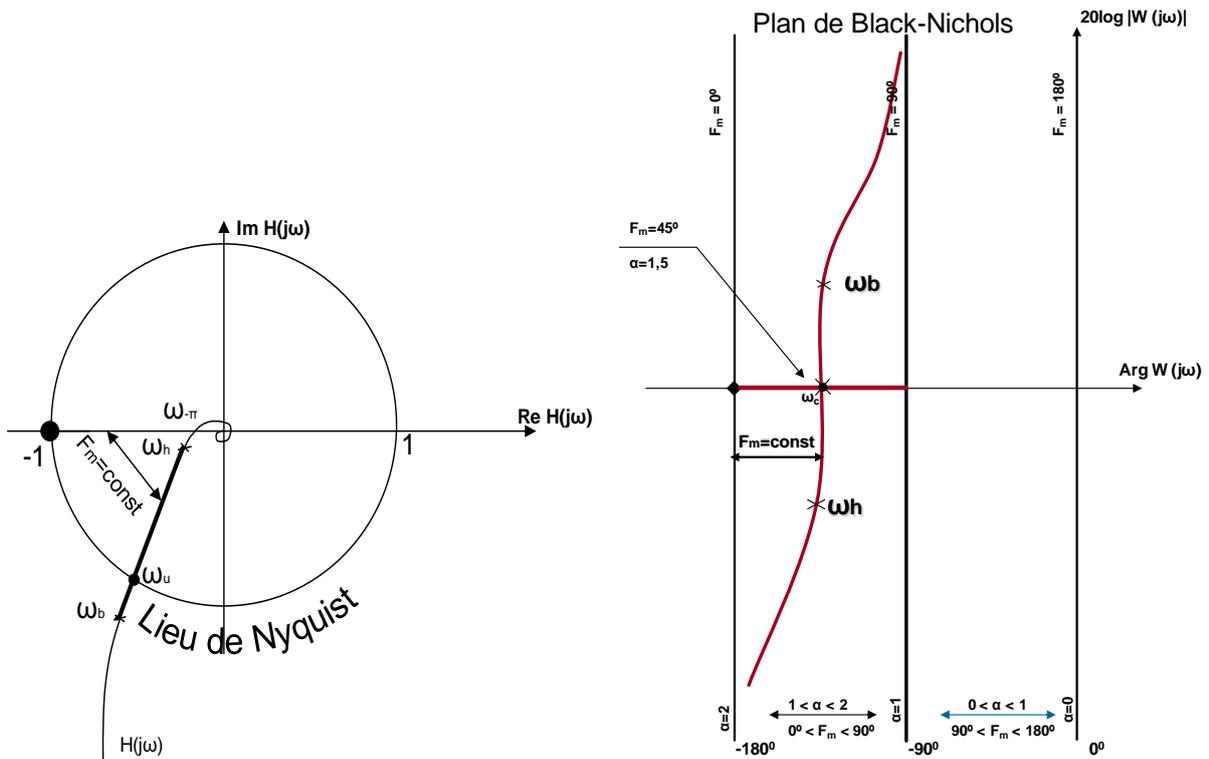


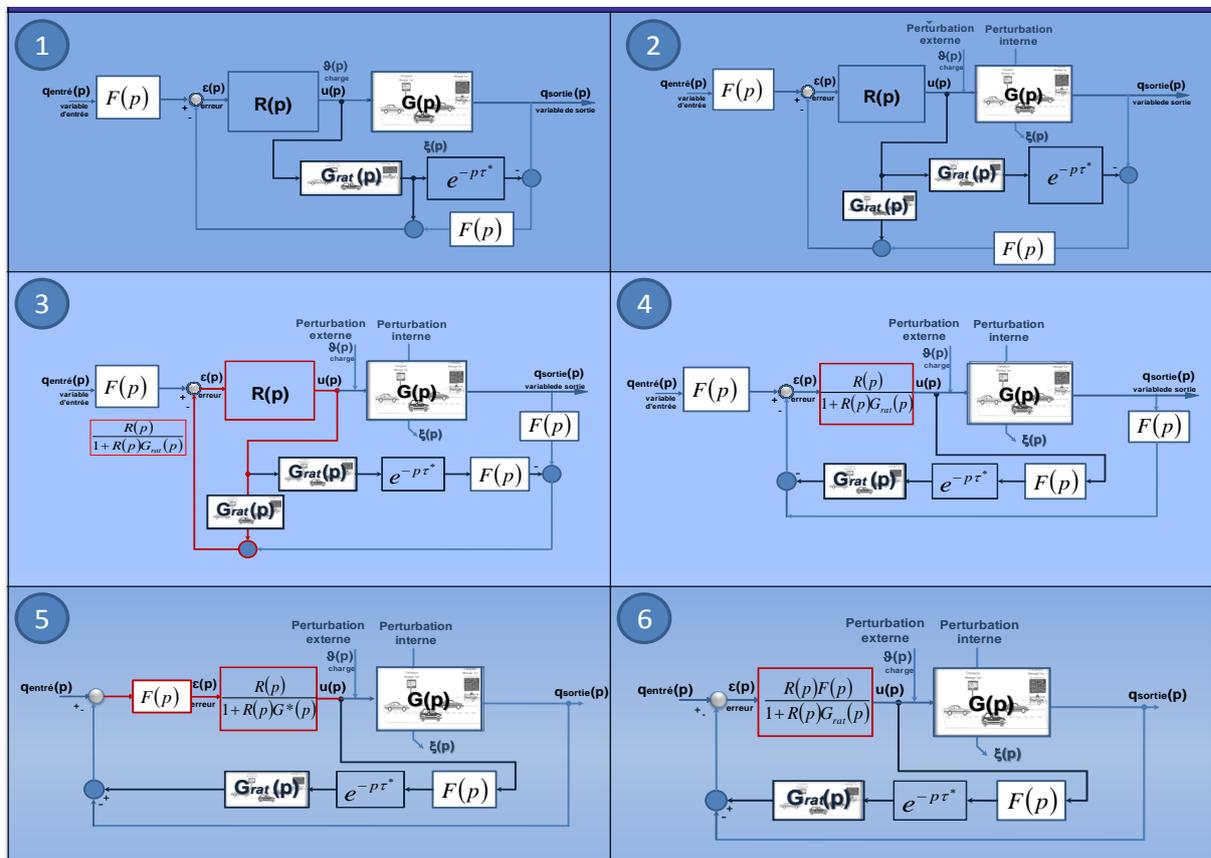
Fig. A.6.2. Propriétés des systèmes à commande non-entière dans le Lieu de Nyquist et le plan de Black-Nichols

Ce gabarit horizontal entoure symétriquement la fréquence de coupure du système en assurant une invariance des marges de stabilités du système dans le cas des perturbations qui peuvent influencés sur le système.

## Annexe 7

### *Etapes de transformation d'un système de commande CRONE avec Smith prédiction et filtre de compensation vers une présentation classique.*

Dans le Chapitre.IV., nous avons présenté que quelques étapes des transformations du système de commande CRONE avec Smith prédiction et compensation du retard par des filtres non-entiers. Plusieurs auteurs traite le modèle classique de commande avec Smith prédiction et filtre de compensation DTC [Ingimundarson A. et al. (2001)], [Guzmán J.L. et al. (2007)], [Normey-Rico J.E. et al. (2007)], [Zhang W. et al. (2007)], [García P. et al. (2008)], [Normey-Rico J.E. et al. (2008)], [Feliu-Batlle et al. (2009)]. Cependant [Nikolov (2008a)], [Nikolov (2008b)] a proposé une approche non-entière pour la même structure. Dans la présente annexe, nous avons pour but de développer tous les dix étapes et de présenter le plus en détail les transformations que subit le système afin de le présenter sous forme classique (Fig. A7.1).



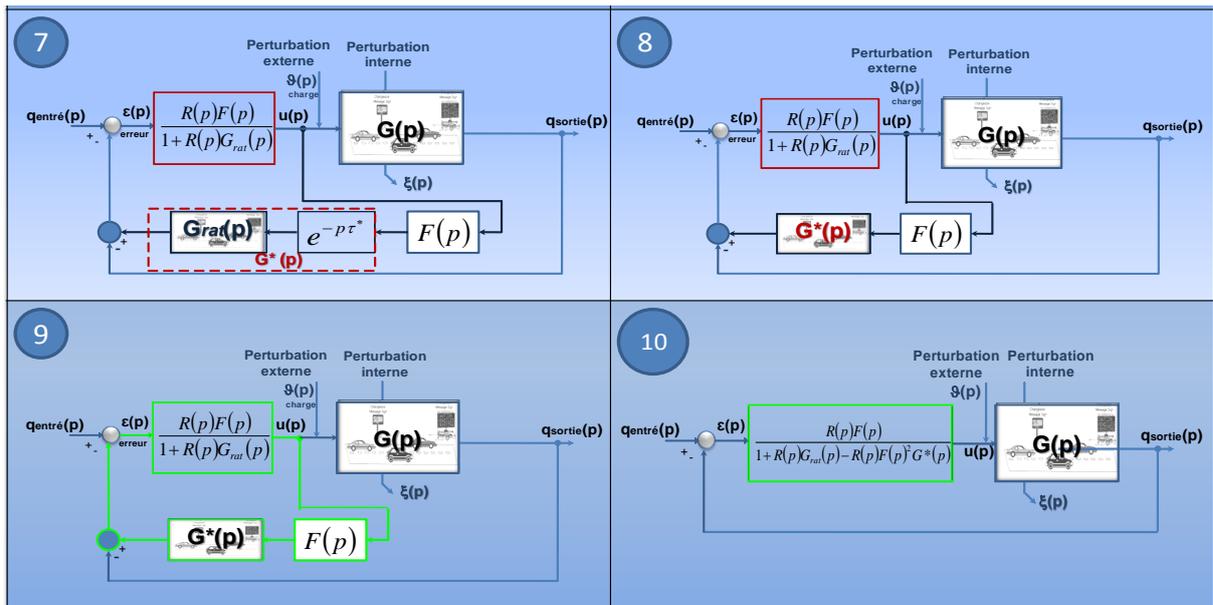


Fig. A7.1. Etapes de transformation d'un système de commande CRONE avec Smith prédiction et compensation du retard vers une structure classique