Le problème de tournées de véhicules avec des demandes évidentielles

The capacitated vehicle routing problem with evidential demands

Nathalie Helal[1] Frédéric Pichon[1] Daniel Porumbel[2] David Mercier[1] Eric Lefèvre[1]
[1] Univ. Artois, EA 3926, Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)
F-62400 Béthune, France.
[2] Conservatoire National des Arts et Métiers, EA 4629, Cedric, 75003 Paris, France

nathalie_helal@ens.univ-artois.fr, {frederic.pichon,david.mercier,eric.lefevre}@univ-artois.fr, daniel.porumbel@cnam.fr

Résumé :

Ce papier porte sur deux modèles du problème de tournées de véhicules avec capacité (CVRP, en abrégé, pour *Capacitated Vehicle Routing Problem*) où les demandes des clients sont incertaines et représentées en utilisant la théorie de l'évidence. Le premier modèle, appelé *CVRP Belief-Constrained Programming*, est une extension de l'approche *Chance-Constrained Programming* en programmation stochastique, où la contrainte en probabilité est remplacée par deux contraintes évidentielles, *i.e.*, nous imposons des bornes minimales pour la croyance et la plausibilité que la somme des demandes sur chaque route respecte la capacité. Le deuxième modèle, appelé *CVRP with Evidential Recourses*, étend l'approche dite de *recours* : si le véhicule arrive à un certain client et ne peut pas satisfaire sa demande, il doit retourner au dépôt et revenir au client. L'incertitude sur les recours possibles sur chaque route est représentée par une fonction de croyance et le coût d'une route est alors son coût classique (sans recours) additionné du pire coût espéré des recours. Des tests numériques sont présentés pour les deux modèles.

Mots-clés :

Problème de tournées de véhicules, Demandes incertaines, Fonctions de croyance.

Abstract:

We present two models of the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) where customer demands are uncertain and represented using evidence theory. The first model, called CVRP Belief-Constrained Programming, is an extension of the Chance-Constrained Programming approach in stochastic programming, in which the probabilistic constraint is replaced by two evidential constraints, *i.e.*, we impose certain minimum bounds on the belief and plausibility that the sum of the demands on each route respect the capacity. The second model, called CVRP with Evidential Recourses, extends the so-called recourse approach : if the vehicle arrives at a certain client and cannot satisfy its demand, it must go back to the depot and return to the client. Uncertainty on potential recourses on each route is represented by a belief function and the cost of a route is then its classical cost (without recourse) plus the worst expected cost of the recourses. Numerical experiments are presented for both models.

Keywords:

Vehicle Routing Problem, Uncertain demands, Belief functions.

1 Introduction

Les tournées de véhicules représentent une importante classe de problèmes en recherche opérationnelle et en optimisation combinatoire. Il s'agit de déterminer les routes d'une flotte de véhicules nécessaires pour collecter les demandes des clients. Une formulation équivalente a pour but de livrer des demandes au lieu de les collecter. L'objectif est de minimiser la somme des coûts des routes. Ce problème est une extension classique du problème du voyageur de commerce et fait partie de la classe des problèmes NP-complets.

Différentes variantes de ce problème existent. On s'intéresse plus précisément au problème de tournées de véhicules avec capacité (CVRP, en abrégé, pour *Capacitated Vehicle Routing Problem*), où une flotte de m véhicules de même capacité Q doit collecter les demandes de n clients, avec d_i la demande du client i telle que $d_i \leq Q$, $i \in [1..n]$. Dans ce problème, chaque route doit vérifier la contrainte que la somme des demandes des clients sur la route est inférieure ou égale à Q.

Le CVRP avec demandes stochastiques est une modification de ce problème où les demandes des clients sont incertaines et représentées dans le cadre probabiliste [11]. Dans ce problème, la contrainte de capacité a une probabilité non nulle d'être violée sur chaque route. Deux approches principales existent pour aborder ce problème : *Chance-Constrained Programming* et *Stochastic Programming with Recourse* [1]. La première approche revient à poser une contrainte assurant qu'il y ait peu de chances que la capacité d'une route soit dépassée. La seconde approche permet des actions dites de recours, tel qu'effectuer un aller-retour au dépôt pour décharger si la capacité d'une route est dépassée. Formellement, il n'y a alors plus de contrainte de capacité et le coût de ces actions est intégré directement dans la fonction objectif. Plus précisément, le coût total espéré de parcours des routes est minimisé, ce coût couvrant le coût classique de parcours, *i.e.*, le coût si aucune action de recours n'est effectuée, ainsi que le coût espéré des actions de recours.

Dans ce papier, nous considérons une généralisation de ce dernier problème où les demandes sont maintenant évidentielles, c'est-à-dire que l'incertitude sur les demandes des clients est représentée dans le cadre de la théorie de l'évidence [8]. En particulier, nous traitons le cas où chaque demande est connue sous forme de plusieurs intervalles, chacun de ces intervalles recevant un poids correspondant à la part de croyance que la demande soit dans l'intervalle. Nous proposons deux modélisations pour ce problème, qui sont des extensions des deux approches principales de la programmation stochastique mentionnée ci-dessus. À notre connaissance cela constitue la première tentative d'adapter ces approches à un programme linéaire en nombres entiers impliquant des incertitudes représentées à l'aide de la théorie de l'évidence – un tel travail d'adaptation a seulement déjà été mené dans le cadre de programmes linéaires classiques [7], qui sont généralement beaucoup plus simples à résoudre que leurs pendants discrets.

Le papier est organisé de la manière suivante. La Section 2 rappelle la définition du CVRP et les concepts nécessaires de la théorie de l'évidence. La Section 3 est consacrée à l'extension de l'approche *Chance-Constrained programming* amenant le premier modèle nommé *CVRP Belief-Constrained Programming* (CVRP-BCP). La Section 4 décrit le modèle à base de recours, nommé *CVRP with Evidential Recourses* (CVRP-ER). La Section 5 présente des résultats numériques, suivie par des conclusions dans la dernière section.

2 Rappels

2.1 Définition du problème de tournées de véhicules avec capacité (CVRP)

Le CVRP est défini sur un graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ est l'ensemble de nœuds et $E = \{\{i, j\} | i \neq j;\ i, j \in V\}$ représente les arêtes. Le sommet 0 est le dépôt. Un coût $c_{i,j}$ est associé à chaque arête de E.

Soit R_k la route du véhicule k et $w^k_{i,j}$ (avec $w^k_{ii} = 0$) une variable binaire qui vaut 1 si le véhicule k se déplace de i à j et sert j (sauf si j est le dépôt). Nous rappelons le modèle CVRP déterministe [6] :

$$\min \sum_{k=1}^{m} C(R_k) \tag{1a}$$

$$s.t.\ C(R_k) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{i,j} w^k_{i,j}, \tag{1b}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{m} w^k_{i,j} = 1, \qquad j \in [1..n] \tag{1c}$$

$$\sum_{i=0}^{n} w^k_{i,\ell} = \sum_{j=0}^{n} w^k_{\ell,j}, \qquad \begin{matrix} k\in[1..m] \\ \ell\in[0..n] \end{matrix} \tag{1d}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w^k_{0,j} \leq 1, \qquad k \in [1..m] \tag{1e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} w^k_{i,j} \leq Q, \quad k \in [1..m] \tag{1f}$$

$$\sum_{\substack{i,j \in L \\ i \neq j}} \sum_{k=1}^{m} w^k_{i,j} \leq |L| - 1,\ L \subseteq V \backslash \{0\} \tag{1g}$$

Les contraintes (1c) indiquent qu'il y a un seul véhicule qui arrive au client j. Les égalités (1d) sont des contraintes dites de conservation de flot : tout véhicule qui arrive à un sommet $\ell \in [0..n]$ doit aussi le quitter. Les contraintes (1e) imposent le fait qu'un véhicule $k \in [1..m]$ sort au maximum une seule fois du dépôt. Les inégalités (1f) garantissent que la capacité du véhicule n'est pas dépassée. Les contraintes (1g) éliminent les sous-tours. Sans ces contraintes, on pourrait avoir un véhicule qui parcourt un chemin $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots i_t \rightarrow i_1$ avec $0 \notin \{i_1,\ i_2, \dots i_t\}$. Les contraintes (1c) et (1d) impliquent $\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{m} w_{j,i}^{k} = 1, \forall j \in [1..n]$, *i.e.*, il y a un seul véhicule qui quitte le client j. Les contraintes (1e) et (1d) impliquent $\sum_{i=1}^{n} w_{i,0}^{k} \leq 1,\ \forall k \in [1..m]$, *i.e.*, le véhicule k ne peut retourner qu'une seule fois au dépôt.

Finalement, observez que ce modèle demande d'utiliser au *maximum* m véhicules, car il est possible d'avoir $w_{i,j}^{k} = 0\ \forall i, j \in [1..n]$ pour certains k.

2.2 Théorie de l'évidence

La théorie de l'évidence a été introduite dans [8]. Soit x une variable qui peut prendre des valeurs dans un domaine X. Dans cette théorie, l'information incertaine sur x peut être représentée par une *Fonction de Masse* (FM) $m^X : 2^X \rightarrow [0, 1]$ telle que $m^X(\emptyset) = 0$ et $\sum_{A \subseteq X} m^X(A) = 1$. L'exposant ^{X} peut être omis s'il n'y a pas de risque de confusion. La masse $m^X(A)$ représente la probabilité de savoir $x \in A$. Tout $A \subseteq X$ tel que $m^X(A) > 0$ est appelé *élément focal* de m^X. Une variable x dont la vraie valeur est connue sous la forme d'une FM m^X est appelée *variable evidentielle*.

Une FM m^X est en correspondance biunivoque avec une *fonction de croyance* Bel^X et une *fonction de plausibilité* Pl^X définies par :

$$\begin{aligned} Bel^X(x \in A) &= \sum_{C \subseteq A} m^X(C), \quad \forall A \subseteq X, \\ Pl^X(x \in A) &= \sum_{C \cap A \neq \emptyset} m^X(C), \quad \forall A \subseteq X. \end{aligned}$$

La *croyance* $Bel^X(x \in A)$ (resp. *plausibilité* $Pl^X(x \in A)$) est la probabilité que l'évidence sur x représentée par m^X implique (resp. est consistante avec) $x \in A$. Nous avons $Bel^X(x \in A) \leq Pl^X(x \in A), \forall A \subseteq X$.

Deux variables évidentielles x et y, avec FM associées m^X et m^Y, sont dites indépendantes si la probabilité jointe de savoir $x \in A$ et $y \in B$ est égale à $m^X(A) \cdot m^Y(B)$ pour tout $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$. De plus, si $X = Y = \mathbb{N}$ et les ensembles focaux de m^X et m^Y sont tous des intervalles d'entiers, alors l'addition de variables indépendantes x et y est la variable évidentielle $z = x + y$ de domaine $Z = \mathbb{N}$ associée à la FM suivante [12] :

$$m^Z(\llbracket u \rrbracket) = \sum_{\llbracket s \rrbracket + \llbracket t \rrbracket = \llbracket u \rrbracket} m^X(\llbracket s \rrbracket) \cdot m^Y(\llbracket t \rrbracket), \tag{2}$$

avec $\llbracket w \rrbracket$ la notation pour l'intervalle $[\underline{w}, \overline{w}]$, et où l'addition des intervalles $\llbracket s \rrbracket$ et $\llbracket t \rrbracket$ est définie par $\llbracket s \rrbracket + \llbracket t \rrbracket = [\underline{s} + \underline{t}, \overline{s} + \overline{t}]$.

Étant donnée une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ et une FM m^X, on introduit la valeur espérée supérieure $E^*(h, m^X)$ définie par [2] :

$$E^*(h, m^X) = \sum_{A \subseteq X} m^X(A) \max_{x \in A} h(x). \tag{3}$$

3 Le modèle CVRP *Belief-Constrained Programming*

Lorsque chaque demande d_i n'est plus déterministe mais stochastique et telle que $P(d_i \leq Q) = 1$, l'approche *chance-constrained programming* utilise le même modèle CVRP (1a)-(1g) introduit dans la Section 2.1, sauf que la contrainte de capacité (1f) est remplacée par les contraintes probabilistes suivantes pour tout $k \in [1..m]$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}^{k} \leq Q\right) \geq 1 - \beta,$$

avec $1 - \beta$ la borne minimale sur la probabilité que la contrainte de capacité soit respectée.

Considérons maintenant la situation où chaque demande d_i est évidentielle, *i.e.*, la connaissance sur la demande du client i est représentée par une FM définie sur le domaine $\Theta = \{1, 2, \dots, Q\}$. Supposons de plus que les ensembles focaux de ces FM sont des intervalles et que les d_i sont indépendantes. Dans ce cas, la contrainte de capacité (1f) du CVRP est remplacée dans le modèle CVRP-BCP par les contraintes évidentielles suivantes pour tout $k \in [1..m]$:

$$Bel\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}^k \leq Q\right) \geq 1 - \underline{\beta}, \tag{4}$$

$$Pl\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}^k \leq Q\right) \geq 1 - \overline{\beta}, \tag{5}$$

avec $\underline{\beta} \geq \overline{\beta}$, où $1 - \underline{\beta}$ (resp. $1 - \overline{\beta}$) représente la borne minimale sur la croyance (resp. plausibilité) que la contrainte de capacité soit respectée.

Pour évaluer les contraintes (4)-(5), la demande totale sur chaque route doit être déterminée en additionnant toutes les demandes des clients sur cette route. Cela se fait en utilisant l'équation (2). Supposons qu'une route R ait N clients et que la demande de chaque client soit associée à une FM ayant au maximum f ensemble focaux. La complexité de l'évaluation des contraintes (4)-(5) est de $\mathcal{O}(N \cdot f^N)$.

Remarquons que dans les cas $\underline{\beta} = \overline{\beta}$ et $\underline{\beta} = 1 > \overline{\beta}$, les demandes évidentielles peuvent être transformées en demandes stochastiques de sorte à obtenir un modèle de type *Chance-Constrained programming* équivalent au modèle CVRP-BCP initial [4]. Par ailleurs, si la demande de chaque client est connue de manière imprécise, *i.e.*, on sait seulement que $d_i \in [\underline{d_i}, \overline{d_i}]$, ce qui correspond à une FM avec un seul ensemble focal, et si $\underline{\beta} = \overline{\beta}$, alors les contraintes (4)-(5) se réduisent à la contrainte $\sum_{i=1}^{n} \overline{d_i} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}^k \leq Q$ [4]. En d'autres termes, le modèle CVRP-BCP revient à chercher dans ce cas la solution minimisant le coût total de servir les clients en supposant leur pire (maximale) demande, et donc il correspond à une procédure de type minimax rencontrée en optimisation robuste [9].

4 Le modèle *Capacitated Vehicle Routing with Evidential Recourses*

4.1 Le modèle général

Dans l'approche avec recours de la programmation stochastique, une action de recours classique consiste à permettre au véhicule de faire un aller-retour au dépôt pour décharger, s'il atteint un client et que sa capacité est dépassée. Afin de servir tous les clients, il peut faire des allers-retours au dépôt à plusieurs moments de sa route. Ces actions impliquent des coûts supplémentaires (pénalités) et en particulier il est possible de calculer pour toute route R le coût espéré $C_P(R)$ de ces pénalités induit par les demandes stochastiques. On peut alors définir le coût total espéré $C_E(R)$ d'une route :

$$C_{\mathrm{E}}(R) = C(R) + C_{\mathrm{P}}(R),$$

où $C(R)$ est le coût déterministe (1b) de la route R quand il n'y a pas de recours. L'approche avec recours de la programmation stochastique consiste alors en une transformation du modèle CVRP (1a)-(1g) :

1. La fonction objectif $\min \sum_{k=1}^{m} C(R_k)$ est remplacée par $\min \sum_{k=1}^{m} C_{\mathrm{E}}(R_k)$;
2. La contrainte de capacité (1f) est supprimée, *i.e.*, les dépassements de capacité entrainent uniquement des pénalités.
3. L'inégalité (1e) est transformée en égalité : il est demandé d'utiliser *exactement* m véhicules. L'inégalité peut être considérée comme dans le modèle CVRP-BCP, mais le problème devient encore plus difficile à résoudre, à cause de la taille de l'espace de solutions d'un modèle de recours [9].

Nous présentons ci-après l'extension de cette approche avec recours au cas de demandes évidentielles indépendantes.

Étant donnée une route R contenant N clients, nous considérons que la livraison du premier client ne peut pas échouer car sa demande évidentielle est toujours bornée par Q. Cependant, un échec peut survenir à tout autre client et il peut même y avoir plusieurs échecs sur R (au pire, si chaque client demandait Q, il y aurait un échec à chaque client sauf le premier).

Formellement, introduisons une variable binaire r_i qui vaut 1 si un échec se produit au $i^{\text{ème}}$ client et 0 sinon (observez $r_1 = 0$). Un échec au $i^{\text{ème}}$ client entraîne l'exécution d'un *recours*, c'est-à-dire un aller-retour du $i^{\text{ème}}$ client au dépôt. Les recours pouvant se produire le long de la route R peuvent être représentés par des vecteurs $(r_2, r_3, \ldots, r_N) \in \{0,1\}^{N-1}$. Nous définissons l'ensemble Ω comme l'espace des vecteurs binaires représentant les recours possibles le long de R. Tout vecteur de recours $(r_2, r_3, \ldots, r_N)$ appartient à $\Omega = \{0,1\}^{N-1}$. Par exemple, si R contient $N = 3$ clients, nous avons $\Omega = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, où les vecteurs binaires signifient que le véhicule doit effectuer un aller-retour au dépôt, respectivement, "jamais", "lorsqu'il atteint le 2ème client", "lorsqu'il atteint le 3ème client", "lorsqu'il atteint les 2ème et 3ème clients".

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $g(\omega)$ représente le coût du vecteur de recours $\omega \in \Omega$, où ω peut s'écrire $(r_2, r_3, \ldots, r_N)$. Étant donné que la pénalité encourue lors de l'échec du $i^{\text{ème}}$ est $2c_{0,i}$ (i.e. un aller-retour au dépôt), nous avons $g(\omega) = \sum_{i=2}^{N} r_i 2c_{0,i}$.

Nous considérons une FM m^Ω représentant l'incertitude vis-à-vis des recours pouvant survenir sur R. Nous allons voir dans la Section 4.2 que les demandes évidentielles peuvent induire une telle FM. En adoptant une attitude pessimiste, le coût espéré supérieur des pénalités sur R peut être obtenu à l'aide de (3) :

$$C^*_{\mathrm{P}}(R) = E^*(g, m^\Omega) = \sum_{B \subseteq \Omega} m^\Omega(B) \max_{\omega \in B} g(\omega)$$

Ainsi, le coût total espéré supérieur $C^*_{\mathrm{E}}(R)$ d'une route R est défini via :

$$C^*_{\mathrm{E}}(R) = C(R) + C^*_{\mathrm{P}}(R), \tag{6}$$

et le modèle CVRP-ER consiste en la même transformation du modèle CVRP que dans le cadre stochastique, à la différence que la fonction objectif est maintenant $\min \sum_{k=1}^{m} C^*_{\mathrm{E}}(R_k)$. Notons que comme $C^*_{\mathrm{E}}(R)$ représente le pire coût espéré de R, on peut dire que le modèle CVRP-ER partage certaines similarités avec la protection contre le pire des cas populaire en optimisation robuste [9].

4.2 Les croyances sur les recours

Pour chaque route R, l'évaluation du coût (6) nécessite le calcul d'une FM m^Ω qui représente l'incertitude sur les recours qui peuvent survenir sur R. Ce calcul est présenté ci-après.

Supposons que R contient N clients. Pour le $i^{\text{ème}}$ client, $i \in [1..N]$, la FM m_i^Θ représente sa demande évidentielle.

Le cas des demandes déterministes. D'abord, on considère un cas simplifié où m_i^Θ comporte un seul ensemble focal d'un seul élément $\{\theta_i\}$, avec $\theta_i \in \Theta$. Autrement dit, $m_i^\Theta(\{\theta_i\}) = 1$, *i.e.*, les demandes sont connues sans aucune incertitude. Notre modèle de recours mène à la définition suivante des variables binaires de recours r_i pour tout $i \in [2..N]$:

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{si } q_{i-1} + \theta_i > Q, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{7}$$

où q_j représente la quantité résiduelle qui reste dans le véhicule après avoir servi le $j^{\text{ème}}$ client pour tout $j \in [1, N]$. Ainsi, $q_1 = \theta_1$, et, pour $j \in [2, N]$ on a :

$$q_j = \begin{cases} q_{j-1} + \theta_j - Q, & \text{si } q_{j-1} + \theta_j > Q, \\ q_{j-1} + \theta_j, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, lorsque la demande de tout client $i \in [1..N]$ est connue sans incertitude (rappelons $m^\Theta(\{\theta_i\}) = 1$), le vecteur binaire de recours $(r_2, r_3, \ldots, r_N)$ peut être déterminé sans incertitude via la formule (7). Cela nous permet de définir une fonction $f : \Theta^N \to \Omega$, telle que $f(\theta_1, \ldots, \theta_N) = (r_2, r_3, \ldots, r_N)$. Par exemple, supposons qu'on a $N = 3$ clients sur une route R avec les demandes $\theta_1 = 3, \theta_2 = 3$

et $\theta_3 = 5$. Si la capacité du véhicule est $Q = 5$, alors $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ représente le vecteur de recours $(r_2, r_3) = (1, 1)$.

Demandes imprécises. Supposons maintenant que les demandes sont connues de manière imprécise, *i.e.*, $m_i^\Theta(A_i) = 1$, $A_i \subseteq \Theta$, $\forall i \in [1..N]$. Dans ce cas, on peut uniquement conclure que le vecteur de recours appartient au sous-ensemble $B \subseteq \Omega$ défini par :

$$B = f(A_1, \ldots, A_N) = \bigcup_{(\theta_1,\ldots,\theta_N) \in A_1 \times \cdots \times A_N} f(\theta_1, \ldots, \theta_N).$$

Demandes évidentielles. Considérons maintenant que chaque FM m_i^Θ possède un nombre arbitraire d'ensembles focaux. Ainsi, l'incertitude sur les vecteurs de recours qui peuvent être générés par R est représentée par une FM m^Ω définie, pour tout $B \subset \Omega$, via

$$m^\Omega(B) = \sum_{f(A_1,\ldots,A_N)=B} \prod_{i=1}^{N} m_i^\Theta(A_i). \qquad (8)$$

Le calcul de m^Ω dans (8) nécessite l'évaluation de $f(A_1, \ldots, A_N)$ pour toutes les combinaisons $(A_1, \ldots, A_N)$ d'ensembles focaux des FM m_i^Θ avec $i \in [1..N]$. Le calcul de toute valeur $f(A_1, \ldots, A_N)$ implique $|A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \ldots \cdot |A_N|$ (donc au pire Q^N) évaluations de la fonction f dans des points $(\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta^N$. Ainsi, le calcul direct de l'équation (8) est en général non faisable au niveau des temps de calculs. Cependant, dans le cas particulier et réaliste où tous les ensembles focaux des fonctions m_i^Θ sont des intervalles d'entiers, il est faisable de calculer $f(A_1, \ldots, A_N)$, et ainsi l'équation (8), avec un algorithme de complexité tout-à-fait gérable. Ces aspects sont présentés en détail dans [5].

5 Tests numériques

5.1 Présentation

Tous les tests présentés dans cette section utilisent comme moteurs d'optimisations des versions modifiées de l'algorithme de recuit simulé proposé dans [3] pour le CVRP. La seule modification introduite par le CVRP-BCP est le calcul des fonctions Bel et de Pl (croyance et plausibilité) pour vérifier la faisabilité de chaque route. Le CVRP-ER supprime la contrainte de capacité, mais change la façon dont la fonction objectif est calculée.

Nous avons généré des instances évidentielles à partir de l'ensemble A d'instances CVRP d'Augerat *et al.* [10]. Nous avons gardé les mêmes coordonnées des clients et la même capacité Q. Cependant, chaque demande déterministe d^{det} a été remplacée par une demande évidentielle d^{ev} associée à une FM m^Θ définie par : $m^\Theta(\{d^{det}\}) = 0.8, m^\Theta([\underline{z}, \overline{z}]) = 0.2$, avec $\underline{z}$ et $\overline{z}$ tirés aléatoirement pour chaque client dans $(d^{det}, Q]$ et $[\underline{z}, Q]$, respectivement. Puisque ces demandes évidentielles augmentent, potentiellement de manière importante, toute demande avec une probabilité égale à 0.2, les nombres de véhicules ont également dû être augmentés par rapport aux instances d'Augerat, afin que des solutions au modèle CVRP-BCP existent et que des solutions pertinentes (c'est-à-dire n'incluant pas trop de recours) au modèle CVRP-ER puissent être obtenues – les nombres de véhicules utilisés dans nos instances apparaissent dans la première colonne du Tableau 1.

5.2 Résultats

Le Tableau 1 présente les résultats obtenus en exécutant 30 fois le recuit simulé pour le CVRP-BCP. Nous avons testé l'approche pour deux valeurs différentes du couple $(\underline{\beta}, \overline{\beta})$: $(0.4, 0.25)$ et une autre valeur plus contraignante $(0.2, 0.15)$. La colonne "Meilleur coût" affiche le coût de la meilleure solution trouvée sur les 30 exécutions. Les colonnes "Écart type" et "T. exéc moyen" affichent respectivement l'écart type des coûts des solutions et le temps d'exécution moyen, sur les 30 exécutions. On peut constater que le couple $(\underline{\beta}, \overline{\beta})$ le plus contraignant induit bien des meilleurs coûts supérieurs à l'autre couple.

Le Tableau 2 présente les résultats du modèle CVRP-ER. Pour chaque instance, nous avons lancé le recuit simulé 30 fois. En plus des colonnes déjà décrites, la colonne “coût moyen” affiche le coût moyen des solutions trouvées pour chaque instance sur les 30 exécutions et la colonne “Pénalité” indique la part des recours dans le coût de la meilleure solution trouvée.

6 Conclusions

Nous avons traité deux modèles qui utilisent des fonctions de croyances pour représenter l'incertitude des demandes dans le problème de tournées de véhicules avec capacité. L'approche est très utile lorsqu'on sait qu'il y a des incertitudes et qu'il est discutable de les représenter avec une loi de probabilité précise. Le premier modèle est une extension de l'approche *chance-constrained programming* où on remplace la contrainte en probabilité par deux contraintes basées sur les fonctions Bel et Pl. Dans le deuxième modèle, toute route est réalisable mais son coût doit prendre en compte d'éventuelles pénalités dues aux recours (allers-retours au dépôt). Une fonction de croyance est utilisée pour représenter l'incertitude sur les recours nécessaires pour servir tous les clients d'une route. Nous présentons des tests numériques pour les deux modèles

Références

[1] J. R. Birge et F. Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] T. Denoeux. Analysis of evidence-theoretic decision rules for pattern classification. *Pattern Recogn*, 30(7) :1095–1107, 1997.

[3] H. Harmanani, D. Azar, N. Helal, et W. Keirouz. A simulated annealing algorithm for the capacitated vehicle routing problem. In *26th International Conference on Computers and their Applications*, New Orleans USA, 2011.

[4] N. Helal, F. Pichon, D. Porumbel, D. Mercier, et É. Lefèvre. The capacitated vehicle routing problem with evidential demands : a belief-constrained programming approach. In J. Vejnarová and V. Kratochvíl, editors, *BELIEF 2016*, volume 9861 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 212–221. Springer, 2016.

[5] N. Helal, F. Pichon, D. Porumbel, D. Mercier, et É. Lefèvre. A recourse approach for the capacitated vehicle routing problem with evidential demands. In *ECSQARU 2017*, *Lecture Notes in Computer Science*, pages 190–200. Springer, 2017.

[6] G. Laporte. The vehicle routing problem : An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59(3) :345–358, 1992.

[7] H. Masri and F. B. Abdelaziz. Belief linear programming. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 51 :973–983, 2010.

[8] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.

[9] I. Sungur, F. Ordónez, et M. Dessouky. A robust optimization approach for the capacitated vehicle routing problem with demand uncertainty. *IIE Transactions*, 40 :509–523, 2008.

[10] Vehicle Routing Data sets. `www.coin-or.org/SYMPHONY/branchandcut/VRP/data/index.htm`. Date téléchargement : 20/3/2016.

[11] J. William R. Stewart et B. L. Golden. Stochastic vehicle routing : A comprehensive approach. *European Journal of Operations Research*, 14(4) :371–385, 1983.

[12] R. R. Yager. Arithmetic and other operations on Dempster-Shafer structures. *Int J Man Mach Stud*, 25(4) :357–366, 1986.

Tableau 1 – Résultats du recuit simulé pour le modèle CVRP-BCP (§ 3)

Instance	$\underline{\beta} = 0.4, \overline{\beta} = 0.25$			$\underline{\beta} = 0.2, \overline{\beta} = 0.15$		
A-nn-km : n clients, m véhicules	Meilleur coût	Écart type	T. exéc. moyen	Meilleur coût	Écart type	T. exéc. moyen
A-n32-k12	1418,3	3.7	3881s.	1850,9	5.3	3733s.
A-n33-k13	1055,3	0	4199s.	1491,6	17,5	4496s.
A-n33-k12	1073,1	6	4495s.	1483,7	0,6	4549s.
A-n34-k14	1320,6	0.1	3818s.	1749,1	0	3852s.
A-n36-k12	1318,9	2.7	5316s.	1718,6	0,2	4914s.
A-n37-k12	1110,6	5	4918s.	1501	34,5	6158s.
A-n37-k14	1597,9	0.5	4135s.	2113,9	2,8	3756s.
A-n38-k13	1154,5	0.9	5041s.	1571,1	5,1	5002s.
A-n39-k15	1485	8.1	4654s.	1944,8	0,9	4622s.
A-n39-k14	1403,9	8.6	4894s.	1906,9	0,2	5108s.
A-n44-k17	1693,4	10.1	4956s.	2158,2	1,2	4951s.
A-n45-k17	1660,3	0.1	5093s.	2184,8	5,1	5169s.
A-n45-k18	1890,1	5.7	4991s.	2573,2	0,7	5211s.
A-n46-k16	1552,2	5.4	5323s.	2108,2	38	5707s.
A-n48-k17	1872,4	10.8	5996s.	2397,5	3,6	6395s.
A-n54-k18	2052,6	13.8	7578s.	2747,9	60,8	6747s.
A-n55-k22	1755,3	9.5	6310s.	2352,6	9,8	6172s.
A-n60-k21	2263,9	17	8169s.	3098,6	34,8	7449s.
A-n61-k23	1793,8	9.9	6965s.	2457,8	42,3	7319s.
A-n62-k21	2532,3	19.1	8212s.	3276,7	32,2	7752s.
A-n63-k24	2978,4	14.6	7164s.	3918,9	22	7216s.
A-n63-k25	2179	8.9	6969s.	2881,1	6,9	7238s.
A-n64-k23	2629,1	16.8	7979s.	3261,5	13,6	7848s.
A-n65-k25	2214,7	16.4	7537s.	3070,9	6	7601s.
A-n69-k24	2056,5	11.1	8876s.	2804,8	52,9	8377s.
A-n80-k27	3507,2	21.5	11110s.	4524,9	21,5	9751s.

Tableau 2 – Résultats du recuit simulé pour le modèle CVRP-ER (§ 4)

Instance	Meilleur coût	Penalité	Coût moyen	Écart type	T. exéc moyen
A-n32-k12	1750,3	16,8%	1783,9	16,1	1958s.
A-n33-k13	1327,5	16,2%	1353,2	13,6	1704s.
A-n33-k12	1275,7	20%	1310	15,5	2014s.
A-n34-k14	1661,9	19,8%	1698,7	24,6	1728s.
A-n36-k12	1670,1	24,2%	1741,9	29	2673s.
A-n37-k12	1359,6	16,7%	1392,5	15,4	4509s.
A-n37-k14	1895,6	24,4%	1947,3	21,2	2286s.
A-n38-k13	1493,8	16,2%	1525,6	15,9	2450s.
A-n39-k15	1851	21,1%	1897,	27,4	2580s.
A-n39-k14	1715,2	22,2%	1755,6	22,9	3264s.
A-n44-k17	2127,8	20,7%	2216,7	25,3	2349s.
A-n45-k17	2147,1	17%	2193,7	21,1	2344s.
A-n45-k18	2530,2	22,7%	2629,7	33,6	2427s.
A-n46-k16	2004	22,3%	2072,8	34,3	3727s.
A-n48-k17	2499,5	21,2%	2559,1	30,2	3348s.
A-n54-k18	2693	21,5%	2760,1	35,3	4881s.
A-n55-k22	2301,7	16,3%	2348,4	27,3	2844s.
A-n60-k21	3077,1	22,5%	3174,4	44,5	5149s.
A-n61-k23	2278	22,8%	2345,3	29,1	3681s.
A-n62-k21	3270,5	23,3%	3367,1	41,7	8333s.
A-n63-k24	4158,8	21%	4261,4	51,9	4148s.
A-n63-k25	2966,7	19,6%	3043,6	39,9	4217s.
A-n64-k23	3528,3	23,9%	3631,1	54,3	6365s.
A-n65-k25	2889,7	22,4%	3040	55,1	3857s.
A-n69-k24	2684,2	21,8%	2810,3	46,3	4702s.
A-n80-k27	5016,2	24,2%	5137,7	69,2	10401s.