Un modèle Belief-Constrained Programming pour le VRPTW avec temps de service et de trajet crédibilistes

A Belief-Constrained Programming model for the VRPTW with evidential service and travel times

Tekwa Tedjini[1] Sohaib Afifi[1] Frédéric Pichon[1] Eric Lefèvre [1]

[1] Univ. Artois, EA 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)
F-62400 Béthune, France

tekwa_tedjini@ens.univ-artois.fr ; { sohaib.afifi, frederic.pichon, eric.lefevre }@univ-artois.fr

Résumé :

Dans cet article, nous considérons une variante du problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps (VRPTW) où les temps de service et les temps de trajet sont incertains et représentés par des fonctions de croyance. Cette théorie est plus générale que la théorie des probabilités dans la modélisation des incertitudes. Nous proposons d'appliquer l'approche *Belief-Constrained Programming*, qui étend la méthode *Chance-Constrained Programming* en optimisation stochastique, au VRPTW afin de gérer les temps de service et les temps de trajet crédibilistes. Notre modèle impose des bornes minimales pour la croyance et la plausibilité que le service de chaque client commence dans sa fenêtre de temps. Un algorithme mémétique est mis en place pour la résolution des instances de Solomon adaptées aux données crédibilistes.

Mots-clés :

Problème de tournées de véhicules, Temps incertain, Fonction de croyance, Algorithme mémétique.

Abstract:

In this paper, we study the vehicle routing problem with time windows (VRPTW), where service times and travel times are uncertain and modelled using belief functions. It is a more general framework, than probability theory, in handling uncertainty. We propose to use the Belief-Constrained Programming approach, an extension to the classical Chance-Constrained Programming technique found in stochastic optimzation, to manage the evidential service and travel times. Our version of the problem considers minimum bounds on the belief and the plausibility that the service at any customer on the route starts within his time window. The problem is solved using a memetic algorithm and tested on Solomon instances adapted to evidential times.

Keywords:

Vehicle routing problem, Uncertain times, Belief functions, Memetic algorithm.

1 Introduction

Le problème de tournées de véhicules (VRP, pour *Vehicle Routing Problem*) est l'un des problèmes les plus étudiés en optimisation combinatoire en raison de sa complexité et son large éventail d'applications (transport, distribution, réseaux de télécommunication, ordonnancement d'ateliers, etc). Le VRP a été introduit, pour la première fois, par Dantzig et Ramser en 1950 [5]. Plusieurs variantes ont été proposées depuis, afin de se rapprocher au mieux des contextes réels (VRP avec contraintes de capacité (CVRP) [15], VRP avec flotte hétérogène [2], VRP avec fenêtres de temps [11], etc).

Nous nous intéressons dans notre travail au problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps (VRPTW, pour *Vehicle Routing Problem with Time Windows*), une variante du VRP dans laquelle une fenêtre de temps est associée à chaque client [11]. L'objectif du VRPTW est de construire un nombre minimum de tournées à moindre coût, afin de servir tous les clients dans leurs fenêtres de temps.

L'un des inconvénients majeurs des modèles proposés pour le VRPTW est que la nature des données (temps de trajet, temps de service) est supposée être déterministe ce qui n'est pas réellement le cas. L'information dans sa nature est généralement incertaine. Par conséquent, les modèles proposés conduisent souvent à des solutions non réalisables. Des recherches en théorie des probabilités et en théorie des ensembles ont conduit alors à la naissance de nouvelles variantes, le VRPTW stochastique (SVRPTW) [8] et le VRPTW robuste (RVRPTW) [1].

Dans le RVRPTW, les temps de service et de trajet incertains appartiennent à un polytope. L'objectif est de déterminer les différents scénarios possibles et d'en minimiser le pire. On reproche à cette approche d'être trop conservative.
Par ailleurs, dans le modèle SVRPTW, les temps incertains sont des variables aléatoires. Deux approches de modélisation appelées programmation par contraintes de chance (CCP, pour *Chance-Constrained Programming*) [8] et programmation stochastique par recours (SPR, pour *Stochastic Programming with Recourse*) [9] sont utilisées. Le modèle CCP impose un seuil minimum (une probabilité) pour que le service de chaque client s'effectue dans sa fenêtre de temps. En revanche, ce modèle ne propose pas d'alternative dans le cas où la contrainte de chance n'est pas respectée, d'où l'intervention des modèles de recours. Dans le modèle SPR, des actions correctives sont menées. Par exemple, les clients sont servis ultérieurement par d'autres véhicules et à chaque service tardif, on associe une pénalité qui sera comptabilisée dans la fonction objectif.
En dépit du succès de l'approche stochastique, celle-ci est également critiquée car elle se limite à la modélisation d'évènements aléatoires. Une représentation plus adéquate des incertitudes de nature épistémique s'avère d'une grande importance.
Par conséquent, des cadres alternatifs, qui étendent à la fois les approches probabilistes et ensemblistes, ont émergé et la théorie des fonctions de croyance en est un [6].
Dans le cadre du VRP, une extension du CCP nommée *Belief Constrained-Programming* (BCP) a été utilisée dans [10] pour le CVRP avec demandes crédibilistes. L'idée est de remplacer la contrainte de chance par deux contraintes crédibilistes. Ces contraintes représentent des bornes minimales pour la croyance et la plausibilité que la demande totale sur la route ne dépasse pas la capacité du véhicule.

Dans cet article, on propose d'appliquer l'approche BCP au VRPTW avec temps de service et temps de trajet incertains modélisés par des fonctions de croyance. On suit la même démarche que dans [10] et on suppose que les temps de service et les temps de trajet appartiennent à des intervalles auxquels on associe des poids. Chaque poids signifie la part de croyance pour que le temps appartienne à l'intervalle. Nous introduisons alors un bloc de contraintes représentant le degré de croyance et de plausibilité pour que le service de chaque client s'effectue dans sa fenêtre de temps. Un algorithme mémétique [12] est mis en place pour résoudre le problème en utilisant les instances de Solomon [19] adaptées à notre cas.
L'article est organisé comme suit. La section 2 donne une définition plus formelle du VRPTW et rappelle les principes de base des fonctions de croyance. Dans la section 3, le modèle BCP pour le VRPTW avec temps crédibilistes ainsi que l'évaluation des contraintes crédibilistes, sont décrits. Les sections 4 et 5 présentent, respectivement, la méthode de résolution et quelques résultats expérimentaux. La section 6 conclut l'article.

2 Définitions et notations

Dans cette section, on rappelle la définition du VRPTW ainsi que les principes de base de la théorie des fonctions de croyance.

2.1 Définition du VRPTW

Étant donné une flotte de K véhicules de capacités Q et de coûts M (M étant une grande valeur), le VRPTW est défini sur un graphe $G = (V, E)$, où $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des nœuds, tel que 0 est le dépôt et $V_c = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des clients. Chaque nœud i a une demande $q_i \leq Q$, un temps de service δ_i et une fenêtre de temps $[e_i, l_i]$ dans laquelle son service peut commencer. On suppose que $q_0 = \delta_0 = 0$ et que $[e_0, l_0] = [0, l_0]$ est l'horizon de planification. Chaque arête $(i, j) \in E$ est munie d'un temps de trajet t_{ij} et d'une distance d_{ij}. On suppose que les distances respectent les inégalités triangulaires.

Si le véhicule k arrive chez un client j avant e_j, il doit attendre jusqu'à l'ouverture de la fenêtre de temps pour le servir. Les services après l_j sont interdits.

Le VRPTW déterministe se décrit par une formulation en variables binaires :

$$\min M. \sum_{j \in V_c} \sum_{k \in K} x_{0jk} + \sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

t.q :

$$\sum_{j|(i,j) \in E} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \forall i \in V_c \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V_c} x_{0jk} = \sum_{i \in V_c} x_{i0k} = 1, \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i|(i,j) \in E} x_{ijk} - \sum_{j|(j,i) \in E} x_{jik} = 0, \forall i \in V_c, k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{i \in V_c} q_i \sum_{j|(i,j) \in E} x_{ijk} \leq Q, \forall k \in K \quad (5)$$

$$s_{ik} \leq l_i, \forall i \in V, k \in K \quad (6)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in E, k \in K \quad (7)$$

où x_{ijk} est la variable de décision (elle vaut 1 si le véhicule k traverse l'arête (i,j) et 0 sinon) et avec s_{jk} le temps de début de service du noeud j par le véhicule k, défini pour tout $(i,j) \in E$ t.q $x_{ijk} = 1$ par :

$$s_{jk} = \max\{e_j, s_{ik} + \delta_i + t_{ij}\} \; ; \quad (8)$$

L'objectif (1) consiste à minimiser le coût total des tournées. La valeur M favorise la minimisation du nombre de véhicules en premier lieu, la distance totale parcourue est ensuite minimisée. Les contraintes (2) assurent que chaque client est servi une seule fois. Les contraintes (3) et (4) signifient que tout véhicule commence et termine sa tournée au dépôt et dès qu'un client est servi, le véhicule le quitte et se dirige vers le prochain client sur la route. Les contraintes (5) garantissent le respect de la capacité des véhicules. Les contraintes (6) imposent que le service de chaque noeud i commence dans sa fenêtre de temps.

Le VRPTW est un problème d'optimisation combinatoire classé parmi les problèmes NP-difficile [16].

2.2 Théorie des fonctions de croyance

La théorie des fonctions de croyance a été introduite par Shafer [17]. Dans cette théorie, l'incertitude quant à la valeur prise par une variable δ définie sur un cadre de discernement Ω fini, est représentée par une *fonction de masse* $m^\Omega : 2^\Omega \mapsto [0,1]$ t.q. $\sum_{A \subseteq \Omega} m^\Omega(A) = 1$ et $m^\Omega(\emptyset) = 0$. $m^\Omega(A)$ représente la part de croyance allouée seulement à $\delta \in A$ (et rien de plus spécifique) et toute partie $A \subseteq \Omega$ telle que $m^\Omega(A) > 0$ est un élément focal de m^Ω.
m^Ω est dite *bayésienne* si $m^\Omega(A) > 0 \Rightarrow |A| = 1$. Dans ce cas là, m^Ω est équivalente à une distribution de probabilité. Si $m^\Omega(A) = 1$, m^Ω est *catégorique* et correspond à un ensemble.
D'autres représentations de l'information peuvent être construites à partir de m^Ω comme la croyance (ou la crédibilité) $Bel^\Omega(A)$ et la plausibilité $Pl^\Omega(A)$, $\forall A \subseteq \Omega$ telles que

$$Bel^\Omega(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m^\Omega(B) \; ; Pl^\Omega(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m^\Omega(B). \quad (9)$$

$Bel^\Omega(A)$ est la croyance minimale soutenant le fait que $\delta \in A$ et $Pl^\Omega(A)$ s'interprète comme la part de croyance qui pourrait potentiellement être allouée à A [7].

Dans ce qui suit, toute variable, dont la vraie valeur est connue sous forme d'une fonction de masse, est appelée *variable crédibiliste*. De plus, on suppose que les fonctions de masse sont définies sur $\Omega = \Re$ et ont toutes un nombre fini d'éléments focaux qui sont tous des intervalles de réels. Notons que les définitions de la section précédente restent tout à fait valides pour ce cadre étant donné que le nombre d'ensembles focaux est fini [13].

Soient δ et t deux variables crédibilistes avec pour fonctions de masse associées m^Ω et m^Θ respectivement et dont les éléments focaux sont des intervalles de réels. δ et t sont dites indépendantes si la masse jointe de savoir que $\delta \in A$ et $t \in B$ est égale à $m^\Omega(A) \times m^\Theta(B)$.

De plus, dans ce cas, la connaissance quant à la valeur prise par la variable $\sigma = \delta + t$ représentée par la fonction de masse m^Σ est définie par [20] :

$$m^\Sigma(\llbracket u \rrbracket) = \sum_{\llbracket u \rrbracket = \llbracket \omega \rrbracket + \llbracket \theta \rrbracket} m^\Omega(\llbracket \omega \rrbracket) \cdot m^\Theta(\llbracket \theta \rrbracket) \quad (10)$$

où $\llbracket \omega \rrbracket = [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$ avec $(\underline{\omega} \leq \overline{\omega})$ et $\llbracket \omega \rrbracket + \llbracket \theta \rrbracket = [\underline{\omega} + \underline{\theta}, \overline{\omega} + \overline{\theta}]$. Relevons qu'au-delà de l'addition toute opération $f : \Omega \times \Theta \to \Sigma$ peut être étendue aux variables crédibilistes [20].

3 VRPTW avec temps de service et temps de trajet crédibilistes

En s'inspirant de ce qui a été fait dans [10] pour le CVRP avec demandes crédibilistes, on propose d'appliquer l'approche Belief Constrained Programming (BCP) au VRPTW avec temps de service et temps de trajet crédibilistes.

3.1 Modélisation

Soient δ_i le temps de service du client i et t_{ij} le temps de trajet entre le nœud i et le nœud j.
Supposons que les temps de service sont indépendants et représentés par des fonctions de masses $m^\Omega_{\delta_i}$ définies sur un même domaine Ω et dont les éléments focaux sont des intervalles de réels $\llbracket \omega_i \rrbracket = [\underline{\omega_i}, \overline{\omega}_i]$ $(\underline{\omega}_i \leq \overline{\omega}_i)$ en nombre fini.

De même, on suppose que les temps de trajet sont indépendants et modélisés par des fonctions de masses $m^\Theta_{t_{ij}}$ définies sur un domaine Θ et ayant un nombre fini d'éléments focaux qui sont tous des intervalles de réels $\llbracket \theta_{ij} \rrbracket = [\underline{\theta}_{ij}, \overline{\theta}_{ij}]$ $(\underline{\theta}_{ij} \leq \overline{\theta}_{ij})$.

L'application de l'approche BCP au VRPTW déterministe implique la prise en compte de l'incertitude au niveau des contraintes (6) du modèle. Ces contraintes sont remplacées, respectivement, par (11) - (12) :

$$Bel(s_{ik} \leq l_i) \geq 1 - \overline{\alpha}, \forall k \in K, \forall i \in V \; ; \quad (11)$$

$$Pl(s_{ik} \leq l_i) \geq 1 - \underline{\alpha}, \forall k \in K, \forall i \in V \; ; \quad (12)$$

où $(1 - \overline{\alpha})$ (resp. $(1 - \underline{\alpha})$) est le degré minimum de croyance (resp. plausibilité) que le service de chaque client commence dans la fenêtre de temps qui lui corresponde $(\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha})$.

3.2 Évaluation des contraintes crédibilistes

Afin d'évaluer les contraintes crédibilistes, le temps de début de service de chaque client doit être calculé.
Soit $R_k = \{r_0 = 0, r_1, \ldots, r_{n_k}, r_{n_{k+1}} = 0\}$ la route du véhicule k. r_j est le $j^{\text{ème}}$ client sur R_k.
Le temps de début de service du client r_j est le maximum entre le début de sa fenêtre de temps e_{r_j} et le temps d'arrivée du véhicule à r_j. Il est calculé récursivement par la formule suivante :

$$s_{r_j k} = \max\{e_{r_j}, s_{r_{j-1}k} + \delta_{r_{j-1}} + t_{r_{j-1}r_j}\} \quad (13)$$

$$\text{avec } s_{r_1 k} = \max\{e_{r_1}, t_{0,r_1}\}.$$

$s_{r_j k}$ dépend des temps de service et des temps de trajet, ainsi, $s_{r_j k}$ est également une variable crédibiliste. Soit Γ son domaine de définition et $m^\Gamma_{s_{r_j k}}$ sa fonction de masse.
Afin de déterminer le temps de début de service de chaque client, il va falloir calculer le temps d'arrivée au client r_j que l'on notera $a_{r_j k}$. On a $a_{r_j k} = s_{r_{j-1}k} + \delta_{r_{j-1}} + t_{r_{j-1}r_j}$ et donc $a_{r_j k}$ est une variable crédibiliste (on notera $\mathcal{A}$ son domaine).
En supposant les temps de trajet indépendants des temps de service, on obtient que le temps d'arrivée au client r_j est calculé comme suit :

$$m^{\mathcal{A}}_{a_{r_j k}}(\llbracket B \rrbracket) = \sum_{\llbracket B \rrbracket = \llbracket \gamma_{r_{j-1}k} \rrbracket + \llbracket \omega_{r_{j-1}} \rrbracket + \llbracket \theta_{r_{j-1}r_j} \rrbracket} m^{\Gamma \times \Omega \times \Theta}(\llbracket \gamma_{r_{j-1}k} \rrbracket \times \llbracket \omega_{r_{j-1}} \rrbracket \times \llbracket \theta_{r_{j-1}r_j} \rrbracket) \quad (14)$$

où $m^{\Gamma \times \Omega \times \Theta}(\llbracket \gamma_{r_{j-1}k} \rrbracket \times \llbracket \omega_{r_{j-1}} \rrbracket \times \llbracket \theta_{r_{j-1}r_j} \rrbracket) = m^\Gamma_{s_{r_{j-1}k}}(\llbracket \gamma_{r_{j-1}k} \rrbracket) \cdot m^\Omega_{\delta_{r_{j-1}}}(\llbracket \omega_{r_{j-1}} \rrbracket) \cdot m^\Theta_{t_{r_{j-1}r_j}}(\llbracket \theta_{r_{j-1}r_j} \rrbracket)$.

Le temps de début de service du client r_j s'exprime alors sous la forme :

$$m^\Gamma_{s_{r_j k}}(\llbracket \gamma_{r_j k} \rrbracket) = \sum_{\llbracket \gamma_{r_j k} \rrbracket = \max\{e_{r_j}, \llbracket \upsilon_{r_j k} \rrbracket\}} m^{\mathcal{A}}_{a_{r_j k}}(\llbracket \upsilon_{r_j k} \rrbracket) \quad (15)$$

où

$$\max\{e_{r_j}, [\![v_{r_jk}]\!]\} = [\max\{e_{r_j}, \underline{v}_{r_jk}\}, \max\{e_{r_j}, \overline{v}_{r_jk}\}]$$

Pour évaluer les contraintes (11) et (12), le temps de début de service de chaque client sur R_k est calculé à l'aide des équations (14) et (15), les valeurs de croyance et de plausibilité sont ensuite déterminées en utilisant les équations (9) puis comparées aux seuils $(1-\overline{\alpha})$ et $(1-\underline{\alpha})$. Si ces derniers sont respectés, pour chaque client, R_k est alors une tournée valide.
La complexité d'évaluation des contraintes crédibilistes est de $\mathcal{O}(c^3 \cdot n)$ où n représente le nombre maximum de clients sur R_k et c est le nombre maximum d'ensembles focaux des fonctions de masse $m^{\Gamma}_{s_{r_{j-1}k}}$, $m^{\Omega}_{\delta_{r_{j-1}}}$ et $m^{\Theta}_{t_{r_{j-1}r_j}}$.

3.3 Cas particuliers

Des remarques similaires à celles dans [10] peuvent être établies dans le cas du VRPTW avec temps crédibilistes en fonction de la nature des temps de service et de trajet et des paramètres $\overline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}$.
En effet, si $\underline{\omega}_i = \overline{\omega}_i$ et $\underline{\theta}_{ij} = \overline{\theta}_{ij}$ pour tout ensemble focal $[\![\omega_i]\!]$ et $[\![\theta_{ij}]\!]$ respectivement, les fonctions de masse $m^{\Omega}_{\delta_i}$ et $m^{\Theta}_{t_{ij}}$ sont toutes les deux bayésiennes, les contraintes (11) et (12) sont équivalentes et le modèle BCP se réduit à un modèle CCP où la probabilité que le service de chaque client commence avant l_i est d'au moins $(1-\underline{\alpha})$: $P(s_{ik} \leq l_i) \geq (1-\underline{\alpha})$.
De plus, notons que si $m^{\Omega}_{\delta_i}$ et $m^{\Theta}_{t_{ij}}$ sont catégoriques, les contraintes (11) et (12) reviennent à vérifier que $\overline{\gamma}_{ik} \leq l_i, \forall i \in V, \forall k \in K$, ainsi, le modèle BCP se ramène à une approche robuste dans laquelle la valeur de la fonction objectif est minimisée quand le temps de début de service atteint sa pire réalisation.
Remarquons également que si $\overline{\alpha} = \underline{\alpha}$, seules les contraintes (11) doivent être vérifiées car (12) seront nécessairement satisfaites. Dans ce cas, le modèle BCP est équivalent à un modèle CCP où s_{ik} est une variable stochastique dont la distribution de probabilité est obtenue en transférant la masse sur chaque intervalle $[\![\gamma_{ik}]\!]$ à son maximum $\overline{\gamma}_{ik}$ et les contraintes (11) sont remplacées par $P(\overline{\gamma}_{ik} \leq l_i) \geq 1-\overline{\alpha}$.
De même, si $\overline{\alpha} = 1$, seules les contraintes (12) sont évaluées car $Bel(s_{ik} \leq l_i) \geq 0$ est toujours vérifiée. Le modèle BCP se transforme ainsi en un modèle CCP t.q les contraintes (12) sont remplacées par $P(\underline{\gamma}_{ik} \leq l_i) \geq 1-\underline{\alpha}$, avec la distribution de probabilité de s_{ik} obtenue en transférant la masse sur chaque intervalle $[\![\gamma_{ik}]\!]$ à son minimum $\underline{\gamma}_{ik}$.

4 Un algorithme mémétique pour le VRPTW avec temps évidentiels

Afin de résoudre le problème d'optimisation décrit à la section 3, nous proposons d'utiliser un algorithme mémétique (MA). Le choix de cet algorithme se justifie par sa performance et son efficacité pour les problèmes du VRP [14], [9].
Un MA peut être décrit comme un algorithme génétique (GA), dans lequel l'étape de mutation est réalisée par des procédures de recherches locales. Ces procédures améliorent, itérativement, la solution courante en explorant son voisinage, ce qui apporte une qualité à la population et protège contre les convergences prématurées du GA.
Dans ce qui suit, une brève description des étapes du MA suivie de son pseudo-code sont présentés.
Codage d'une solution. Une solution codée est représentée par un chromosome. C'est une permutation des n clients qui peut être interprétée comme une tournée géante dans laquelle les contraintes de temps et de capacité sont négligées.
Décodage d'une solution. Le décodage d'un chromosome permet de construire une solution, i.e un ensemble de tournées respectant toutes les contraintes du problème. Pour ce faire, nous avons adapté la méthode *Split* [14], conçue originalement pour le CVRP, au VRPTW avec temps crédibilistes. *Split* décompose la tournée géante en plusieurs tournées de coût minimum. L'idée est de construire un graphe auxiliaire $H = (Y, Z)$. Dans ce graphe, l'ordre des clients dans le chromosome est caractérisé par Y =

$\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, avec $y_1, \ldots, y_n \in V_c$ et tout arc $(y_i, y_j) \in Z | i < j$ représente une tournée réalisable visitant les clients $y_{i+1}, \ldots, y_j$. Une tournée est réalisable si et seulement si les contraintes (5), (11) et (12) sont vérifiées. Le coût d'un arc est égal à la distance totale sur cette tournée à laquelle est rajoutée une grande valeur M pour minimiser le nombre de tournées en premier lieu. H est acyclique donc, en utilisant l'algorithme de Bellman [3], le plus court chemin entre y_0 et y_n peut être calculé. Ce dernier représente le coût de la solution optimale pour le chromosome en question.

L'utilisation de *Split* réduit de façon significative l'espace de recherche car toute solution S du problème admet une représentation indirecte (solution codée) S_{cd}. Le passage de S vers S_{cd} se fait par concaténation des tournées de S tandis que le passage de S_{cd} vers S s'effectue, de manière optimale, via *Split*.

Population. La population est composée de m chromosomes générés par des permutations aléatoires des n clients et triée par ordre croissant des coûts.

Sélection et croisement. Nous sélectionnons, à chaque itération, un couple de parent p_1 et p_2. Ensuite, on les croise afin d'obtenir un chromosome enfant enf.

Recherche locale. Tout enfant issu d'un croisement a une probabilité p_{rl} d'être amélioré par une recherche locale. Plusieurs opérateurs de recherche locale ont prouvé leur efficacité pour le VRPTW [9]. Parmi ces opérateurs, nous avons choisi le *Destruction/repair operator* [4]. Son principe est de retirer un nombre aléatoire de clients des tournées puis de les réinsérer dans les meilleures positions évaluées. Le procédé est réitéré plusieurs fois et s'arrête après n itérations sans amélioration (n étant le nombre de clients).

Mise à jour de la population. Après l'amélioration de l'enfant, on doit décider si ce dernier va rejoindre la population. Si enf est meilleur que le pire chromosome de la population $pop_{init}[m]$, la population est mise à jour en insérant enf et en retirant $pop_{init}[m]$.

L'algorithme 1 synthétise les étapes du MA.

Algorithm 1 Schéma général du MA

Entrée: pop_{init} une population de solutions initiales.
Sortie: La meilleure solution au problème.

Évaluer chaque solution dans pop_{init}.
tant que (critère d'arrêt non atteint) **faire**
    sélectionner deux parents p_1 et p_2.
    $enf \leftarrow$ croisement (p_1, p_2).
    si $rand[0,1] < p_{rl}$ **alors**
        $enf \leftarrow$ recherche locale.
    fin si
    si coût$(enf) \leq$ coût$(pop_{init}[m])$ **alors**
        insérer enf dans pop_{init}.
    fin si
fin tant que

5 Résultats expérimentaux

Nous avons adapté des instances de Solomon [19] pour prendre en compte la nature crédibiliste des temps de service et de trajet. Ensuite, des tests préliminaires ont été effectués afin de valider le MA. Dans ce qui suit, nous présentons les instances ainsi qu'un échantillon des résultats obtenus.

Les instances de Solomon se composent de groupes à 25, 50 et 100 clients. Chaque groupe contient 56 instances réparties sur six catégories $C1$, $R1$, $RC1$, $C2$, $R2$ et $RC2$. On distingue deux classifications pour ces catégories. La première concerne les fenêtres de temps. Les catégories $C1$, $R1$ et $RC1$ (type 1) ont des fenêtres de temps serrées. Les catégories $C2$, $R2$ et $RC2$ (type 2), quant à elles, se caractérisent par des fenêtres plus larges. La deuxième classification concerne la localisation des clients. Les clients de $R1$ et $R2$ ont des positions aléatoires, les clients de $C1$ et $C2$ sont classés par groupes et les clients de $RC1$ et $RC2$ ont un mélange de positions aléatoires et groupées.

Nous avons préservé les mêmes données déterministes à l'exception des temps de service δ_i et des temps de trajet t_{ij} que nous avons transformé en variables crédibilistes. δ_i est représenté par une fonction de masse

$m^{\Omega}_{\delta_i}$ définie par : $m^{\Omega}_{\delta_i}(\{\delta_i^{det}\}) = 0.8$ et $m^{\Omega}_{\delta_i}([\underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i]) = 0.2$ avec δ_i^{det} la valeur déterministe de δ_i et $\underline{\omega}_i$, $\overline{\omega}_i$ deux valeurs aléatoires choisies dans $[\delta_i^{det}, \delta^{max}]$ et $[\underline{\omega}_i, \delta^{max}]$ respectivement et où δ^{max} est la valeur maximale que peut prendre le temps de service. La même technique a été utilisée pour générer les temps de trajet : $m^{\Theta}_{t_{ij}}(\{t_{ij}^{det}\}) = 0.8$ et $m^{\Theta}_{t_{ij}}([\underline{\theta}_{ij}, \overline{\theta}_{ij}]) = 0.2$ avec t_{ij}^{det} la valeur déterministe de t_{ij} et $\underline{\theta}_{ij}$, $\overline{\theta}_{ij}$ deux valeurs aléatoires choisies dans $[t_{ij}^{det}, t^{max}]$ et $[\underline{\theta}_{ij}, t^{max}]$ respectivement et où t_{ij}^{max} est la valeur maximale que peut prendre le temps de trajet.
Le Tableau 1 présente une synthèse des résultats obtenus pour un exemple des instances de Solomon à 50 clients. Nous avons effectué 10 exécutions par instance comme dans [9] et nous avons utilisé les paramètres suivants :
$\underline{\alpha} = 0.05$ et $\overline{\alpha} = 0.1$. Le nombre maximum d'itérations sans amélioration a été fixé à n^3.
Les notations nbv et $dist$ représentent, respectivement, le nombre de véhicules et la distance totale des tournées. Le temps d'exécution moyen CPU est donné en secondes.

Tableau 1 – Résultats du MA pour 50 clients

Inst	Best Sol		Std Dev		CPU(s)
	nbv	dist	nbv	dist	
$C104$	7	1385.51	0.82	94.59	1371.02
$C107$	18	1744.26	0.84	59.1	366.29
$C204$	4	1618.24	0.35	83.49	3695.36
$C207$	13	1707.22	0.63	79.43	46.86
$R104$	15	1646.94	0.0	76.31	309.9
$R107$	17	1838.37	0.99	99.42	179.7
$R204$	4	1779.6	0.32	50.03	4838.98
$R207$	7	1694.46	0.42	94.85	435.05
$RC104$	17	2322.22	0.97	120.42	333.1
$RC107$	22	2671.33	0.48	89.14	165.23
$RC204$	5	2350.5	0.63	102.0	3070.57
$RC207$	10	2578.19	0.63	74.18	81.02

Nous remarquons que le nombre de véhicules est plus important pour les instances de type 1. Ceci est peut être dû à la nature des fenêtres de temps serrée pour ce premier type. Inversement dans cette hypothèse, pour les instances de type 2, les fenêtres sont suffisamment larges pour avoir plus de clients sur une route. Une étude statistique est envisagée afin de confirmer cette remarque et d'étudier l'impact de la largeur des fenêtres de temps sur les résultats obtenus.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une modélisation, avec des fonctions de croyance, pour le VRPTW avec temps de service et temps de trajet incertains. Le modèle utilise l'approche Belief-Constrained Programming et couvre les deux approches probabiliste et ensembliste, ce qui est utile dans le cas où l'on dispose d'informations qui ne sont pas seulement aléatoires ou imprécises. Nous avons également présenté notre méthode de résolution qui a été testée sur des adaptations d'instances classiques de la littérature.
Nous avons identifié plusieurs pistes à explorer afin d'améliorer notre modèle. La première piste serait de considérer un autre type d'ensemble focaux, comme un polytope budgété, afin de contrôler le niveau d'incertitude des temps de service et de trajet, à l'image de ce qui se fait en optimisation robuste. Une deuxième piste serait de passer vers une fonction bi-objectif qui minimise à la fois le nombre de véhicules et les temps de trajet incertains en définissant un front de paréto de solutions non dominées et en utilisant des relations de dominance propres à notre modèle. Une idée similaire a été explorée dans [18] pour le VRP avec demandes incertaines où l'objectif consiste à minimiser les distances et les retards induits sur les routes. Nous souhaitons, également, ajuster les paramètres de notre méthode de résolution et l'enrichir par d'autres opérateurs de recherche locale.

Références

[1] A. AGRA, M. CHRISTIANSEN, R. FIGUEIREDO, K.-L. HVATTUM, M. POSS et C. REQUEJO : The robust vehicle rou-

ting problem with time windows. *Comput Oper Res*, 40:856–866, 2013.

[2] R. BALDACCI, M. BATTARRA et D. VIGO : Routing a heterogeneous fleet of vehicles. *In* B. GOLDEN, S. RAGHAVAN et E. WASIL, éditeurs : *The Vehicle Routing Problem : Latest Advances and New Challenges*, volume 43 de *Operations Research/Computer Science Interfaces*, pages 3–27. Springer, Boston, MA, 2008.

[3] R. BELLMAN : On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16:89–90, 1958.

[4] H. BOULY, D.C. DANG et A. MOUKRIM : A memetic algorithm for the team orienteering problem. *4or*, 8(1):49–70, 2010.

[5] G. B. DANTZIG et J. H. RAMSER : The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91, 1959.

[6] T. DENOEUX : 40 years of Dempster-Shafer theory. *INT J APPROX REASON*, 79:1–6, 2016.

[7] D. DUBOIS, H. PRADE et P. SMETS : A definition of subjective possibility. *INT J APPROX REASON*, 48(2):352–364, 2008.

[8] F. ERRICO, G. DESAULNIERS, M. GENDREAU, W. REI et L.-M. ROUSSEAU : The vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service times. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 7(3):223–251, 2018.

[9] A. GUTIERREZ, L. DIEULLE, N. LABADIE et N. VELASCO : A multi-population algorithm to solve the vrp with stochastic service and travel times. *COMPUT IND ENG*, 125:144–156, 2018.

[10] N. HELAL, F. PICHON, D. PORUMBEL, D. MERCIER et E. LEFEVRE : The capacitated vehicle routing problem with evidential demands. *INT J APPROX REASON*, 95:124–151, 2018.

[11] B. KALLEHAUGE, J. LARSEN, O.B. MADSEN et M.M. SOLOMON : Vehicle routing problem with time windows. *In* G. DESAULNIERS, J. DESROSIERS et M.M. SOLOMON, éditeurs : *Column Generation*, pages 67–98. Springer, Boston, MA, 2005.

[12] P. MOSCATO et C. COTTA : A gentle introduction to memetic algorithms. *In* F. GLOVER et G.A. KOCHENBERGER, éditeurs : *Handbook of Metaheuristics*, volume 57 de *ISOR*, pages 105–144. Springer, Boston, MA, 2003.

[13] G. NASSREDDINE, F. ABDALLAH et T. DENOEUX : State estimation using interval analysis and belief function theory : Application to dynamic vehicle localization. *IEEE Trans Syst Man Cybern B*, 40(5):1205–1218, 2010.

[14] C. PRINS : A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Comput Oper Res*, 31(12):1985–2002, 2004.

[15] T.K. RALPHS, L. KOPMAN, W. R. PULLEYBLANK et L.E. TROTTER : On the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 94(2-3):343–359, 2003.

[16] M.W.P. SAVELSBERGH : Local search in routing problems with time windows. *Ann. Oper. Res*, 4(1):295–305, 1985.

[17] G. SHAFER : A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press*, 1976.

[18] A. SKOUDARLI, A. AÏDER et E.G. TALBI : Local search for multiobjective vehicle routing with uncertain demands. *CAROMAD*, 1:1–16, 2016.

[19] M.M. SOLOMON : Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time window constraints. *Oper. Res.*, 35(2):254–265, 1987.

[20] R. R. YAGER : Arithmetic and other operations on Dempster-Shafer structures. *Int J Man Mach Stud*, 25(4):357–366, 1986.