Une approche généralisée du regret minimax pour des problèmes d'optimisation sous incertitude sévère avec objectifs linéaires

A Generalized Minimax Regret Approach for Optimization Problems under Severe Uncertainty with Linear Objectives

Tuan-Anh Vu[1] Sohaib Afifi[1] Éric Lefèvre[1] Frédéric Pichon[1]

[1] Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

F-62400 Bethune, France

{tanh.vu, prénom.nom}@univ-artois.fr

Résumé :

Dans cet article, nous étudions un problème général d'optimisation avec une fonction objective linéaire incertaine. Nous abordons l'incertitude en utilisant deux modèles : les fonctions de croyance et, plus généralement, les capacités. Dans le premier modèle, nous utilisons le critère de regret minimax généralisé introduit par Yager, tandis que dans le second, nous étendons ce critère pour trouver des solutions optimales. Cet article identifie quelques cas traitables pour le problème résultant. De plus, lorsque les ensembles focaux des fonctions de croyance considérées sont des produits cartésiens d'intervalles, nous développons une méthode 2-approximation qui reflète la méthode bien connue du scénario médian utilisée pour les problèmes d'optimisation de regret minimax avec des données d'intervalle.

Mots-clés :

Regret minimax, Fonctions de croyance, Capacités, Programmation linéaire.

Abstract:

In this paper, we study a general optimization problem with an uncertain linear objective. We address the uncertainty using two models : belief functions and, more generally, capacities. In the former model, we use the generalized minimax regret criterion introduced by Yager, while in the latter one, we extend this criterion, to find optimal solutions. This paper identifies some tractable cases for the resulting problem. Furthermore, when focal sets of the considered belief functions are Cartesian products of intervals, we develop a 2-approximation method that mirrors the well-known midpoint scenario method used for minimax regret optimization problems with interval data.

Keywords:

Minimax regret, Belief functions, Capacities, Linear programming.

1 Introduction

L'incertitude est omniprésente dans les problèmes d'optimisation, menant à de nombreux outils pour la gérer. Cet article revisite le célèbre critère de regret minimax de l'optimisation robuste. Ce critère découle principalement de deux motivations clés dans la prise de décision sous incertitude : (i) la tendance humaine courante à regretter les choix, surtout si une meilleure option est découverte plus tard ; et (ii) le désir d'une option avec la meilleure performance dans le pire des cas. Le critère de regret minimax, largement étudié pour les problèmes d'optimisation avec des coefficients incertains dans les fonctions objectives [8], suppose un cadre classique où seul un ensemble de scénarios possibles des réalisations des coefficients est disponible. Sous cette information limitée, le critère vise à trouver une solution qui minimise le regret maximal dans tous les scénarios.

Cependant, une information partielle est généralement disponible dans des situations réelles. Par exemple, connaître l'ensemble de scénarios nous permet de consulter des experts qui peuvent évaluer la possibilité de chaque scénario. Dans de tels cas, affiner le critère de regret minimax pour tenir compte de l'information partielle devient nécessaire pour mieux refléter les situations réelles. Il est intéressant de noter qu'en cas d'incertitude *évidentielle*, c'est-à-dire lorsque l'incertitude est modélisée par des fonctions de croyance [10], une notion de regret minimax généralisé a déjà été introduite par Yager [13]. De même, un travail récent d'Adam et Destercke [1] a examiné une notion similaire dans le cadre possibiliste.

Dans le prolongement de notre récent article sur un problème d'optimisation général avec une fonction objective linéaire incertaine [11], nous étudions également le même problème ici.

Contrairement à [11] qui considérait cinq autres critères, cet article utilise le critère de regret minimax généralisé pour trouver des solutions optimales. L'article est organisé comme suit : La section 2 présente quelques éléments sur les fonctions de croyance. Dans la section 3, nous intégrons le critère de Yager [13] au problème considéré. Pour le critère de Yager, deux types de fonctions de croyance, où (i) leurs cadres sont finis et (ii) leurs cadres sont infinis mais leurs ensembles focaux prennent une forme spéciale, sont abordés respectivement dans les sections 4 et 5. Nous étendons ensuite le critère de Yager à un cas plus général où l'incertitude est modélisée par des capacités ou des probabilités inférieures [6, 4] dans la section 6. L'article se termine par une conclusion.

2 Théorie des fonctions de croyance

Soit Ω l'ensemble de toutes les valeurs possibles d'une variable d'intérêt ω. Dans ce document, nous supposons que Ω est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Dans la théorie des fonctions de croyance [10], en adaptant la présentation de [12], l'information partielle sur la vraie valeur (inconnue) de ω est donnée par une application $m : \mathcal{C} \mapsto [0,1]$ appelée fonction de masse, où $\mathcal{C}$ est une collection finie de sous-ensembles fermés de Ω, telle que $\sum_{A\in\mathcal{C}} m(A) = 1$ et $m(\emptyset) = 0$. Si Ω est fini, nous prenons habituellement $\mathcal{C} = 2^\Omega$.

La masse $m(A)$ quantifie la quantité de croyance allouée au fait de savoir seulement que $\omega \in A$. Un ensemble focal de m est un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$ tel que $m(A) > 0$. Soit $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_K\}$ l'ensemble de tous les ensembles focaux de m. La fonction de masse m induit une fonction de croyance Bel définie sur $\mathcal{B}(\Omega)$ l'ensemble des boréliens de Ω où $Bel(A) = \sum_{B\in\mathcal{F}:B\subseteq A} m(B)$.

3 Formulation du problème

Dans cet article, nous nous concentrons sur un problème général avec une fonction objective linéaire :

$$\{\min c^T x : x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}\} \tag{P}$$

où $\mathcal{X}$ est un ensemble compact et $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de coefficients de la fonction objective. (P) est un problème de programmation linéaire si $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : Mx \leq b\}$ où M est une matrice de dimension $q \times n$ et b est un vecteur de dimension q. Si $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$, alors (P) est un problème combinatoire. Dans cet article, nous supposons que le vecteur de coefficients c est incertain et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des valeurs possibles de c. Chaque $c \in \Omega$ est alors appelé un scénario.

3.1 Le critère de regret minimax

Le regret $R(x,c)$ d'une solution x sous un scénario $c \in \Omega$ est défini comme $R(x,c) := c^T x - val^*(c)$ où $val^*(c) := \min_{x\in\mathcal{X}} c^T x$ est la valeur optimale de (P) sous c. Le regret maximal $R(x)$ de x est défini comme $R(x) := \max_{c\in\Omega} R(x,c)$: il représente le regret de x dans le pire des cas dans Ω. L'objectif est de trouver une solution x ayant le minimum de $R(x)$ en résolvant le problème :

$$\min_{x\in\mathcal{X}} R(x) = \min_{x\in\mathcal{X}} \max_{c\in\Omega} (c^T x - val^*(c)) \tag{MR}$$

3.2 Le critère de regret minimax généralisé sous incertitude évidentielle

Si une connaissance partielle sur c est donnée par une fonction de masse m, nous généralisons le critère de regret minimax comme suit [13]. Pour chaque ensemble focal F de m, le regret maximal de x est $R^F(x) := \max_{c\in F}(c^T x - val^*(c))$. Le regret maximal attendu de x par rapport à m est alors défini comme

$$\overline{R}(x) := \sum_{r=1}^{K} m(F_r) R^{F_r}(x). \tag{1}$$

Dans cet article, nous nous concentrons sur la résolution du problème (GMR) :

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \overline{R}(x) = \min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{r=1}^{K} m(F_r) \max_{c\in F_r}(c^T x - val^*(c)). \tag{GMR}$$

Notez que si m est une fonction de masse vide, c'est-à-dire si Ω est le seul ensemble focal de m, alors (GMR) redevient (MR).

Remarque 1. *Les informations sur le vrai scénario peuvent être données par une* distribution de possibilités quantitatives $\pi : \Omega \to [0,1]$ *dont les valeurs de π représentent les degrés de possibilité des éléments dans Ω, parmi lesquels il existe un c tel que $\pi(c) = 1$. Cette représentation de l'incertitude est pratique, car π peut, par exemple, être construite à partir d'évaluations d'experts. Supposons que $1 = \alpha_1 > \ldots > \alpha_K > \alpha_{K+1} = 0$ soient les valeurs distinctes de π. Pour chaque α_i, la coupe α_i associée de π est définie comme : $F_{\alpha_i} = \{c \in \Omega : \pi(c) \geq \alpha_i\}$. Évidemment, $F_{\alpha_1} \subset \ldots \subset F_{\alpha_K}$. Si nous construisons une fonction de masse sur Ω avec des ensembles focaux F_{α_i} et $m(F_{\alpha_i}) = \alpha_i - \alpha_{i+1}\ \forall i \in \{1, \ldots K\}$, nous revenons à la version du critère de regret minimax généralisé sous cadre possibiliste, introduite dans [1]. Notez que ce type de fonction de masse dont les ensembles focaux sont emboîtés est dit* consonant.

4 Quand Ω est fini

Dans ce cas, nous avons une fonction de masse m sur un ensemble fini de l éléments $\Omega = \{c^1, \ldots, c^l\} \subset \mathbb{R}^n$. Pour les problèmes d'optimisation combinatoire, l'intraitabilité de (MR) est bien documentée, voir par exemple [8], ce qui implique également l'intraitabilité de (GMR) pour de tels problèmes. Le principal résultat de cette section concerne donc un cas où (GMR) est traitable.

Proposition 1. *Supposons que (P) soit un problème de programmation linéaire. Alors (GMR) peut être résolu efficacement à condition que $|\mathcal{F}|$ ne soit pas grand. En particulier, si $|\mathcal{F}|$ est polynomiallement borné en l alors (GMR) peut être résolu en temps polynomial.*

Démonstration. Nous reformulons (GMR) comme :

$$\begin{aligned} &\min \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F) z_F \\ &z_F \geq c^T x - val^*(c)\ \forall F \in \mathcal{F}, c \in F \\ &Mx \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Le problème (2) est un problème de programmation linéaire. De plus, pour chaque $c \in \Omega$, $val^*(c) = \min\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}, Mx \leq b\}$ peut être calculé efficacement par les solveurs de programmation linéaire standards. Par conséquent, (2) peut être résolu efficacement à condition que le nombre d'ensembles focaux ne soit pas grand et peut être résolu en temps polynomial si $|\mathcal{F}|$ est polynomiallement borné. □

5 Quand Ω est infini et les ensembles focaux de m sont des produits cartésiens d'intervalles

Dans cette section, nous supposons que chaque ensemble focal F_r de m est un produit cartésien d'intervalles, c'est-à-dire

$$F_r = \times_1^n [l_i^r, u_i^r]\ \forall r.$$

Lorsque m a un unique ensemble focal de ce type, nous revenons à la célèbre représentation de l'incertitude par intervalles en optimisation robuste. Nous remarquons que sous la représentation par intervalles, le problème classique de regret minimax (MR) est intraitable dans les cas où (P) est un problème combinatoire ou de programmation linéaire [8]. Heureusement, il existe une heuristique bien connue pour obtenir un algorithme de 2-approximation pour (MR) : elle utilise une solution optimale de (P) sous le scénario médian [5, 8]. L'objectif ici est d'adapter cette heuristique pour notre représentation de l'incertitude considérée, pour laquelle nous suivons l'approche de [5]. Nous désignons

$$\overline{u}_i := \sum_{r=1}^K m(F_r) u_i^r \text{ et } \overline{l}_i := \sum_{r=1}^K m(F_r) l_i^r. \tag{3}$$

Proposition 2. *Soient $\overline{c}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{c}_i = \frac{\overline{u}_i + \overline{l}_i}{2}$ et y une solution optimale de (P)* *sous $\overline{c}$, c'est-à-dire, $\overline{c}^T y = \min_{x\in\mathcal{X}} \overline{c}^T x$. Soit x^* n'importe quelle solution optimale de (GMR). Alors $\overline{R}(y) \leq 2\overline{R}(x^*)$.*

Pour prouver la Proposition 2, nous avons besoin de quelques observations préliminaires. Premièrement, nous pouvons remarquer que pour tout F_r, $R^{F_r}(x^*) = \max_{x\in\mathcal{X}} \max_{c\in F_r} c^T(x^* - x)$, et ainsi

$$R^{F_r}(x^*) \geq \max_{c\in F_r} c^T(x^* - y). \tag{4}$$

D'un autre côté, $\max_{c\in F_r} c^T(x^* - y) = \sum_{i:x_i^*>y_i} u_i^r(x_i^* - y_i) - \sum_{i:x_i^*<y_i} l_i^r(y_i - x_i^*)$. Par conséquent, $R^{F_r}(x^*) \geq \sum_{i:x_i^*>y_i} u_i^r(x_i^* - y_i) - \sum_{i:x_i^*<y_i} l_i^r(y_i - x_i^*)$. En utilisant (1) et (3),

$$\overline{R}(x^*) \geq \sum_{i:x_i^*>y_i} \overline{u}_i(x_i^* - y_i) - \sum_{i:x_i^*<y_i} \overline{l}_i(y_i - x_i^*) \tag{5}$$

Dans la suite, nous utilisons la notation $\delta(y - x^*, F_r) := \max_{c\in F_r} c^T(y - x^*)$. En référence à [5, Propriété 2.2], nous avons $R^{F_r}(y) \leq R^{F_r}(x^*) + \delta(y - x^*, F_r)\ \forall r$. De (1),

$$\overline{R}(y) \leq \overline{R}(x^*) + \sum_{r=1}^{K} m(F_r)\delta(y - x^*, F_r). \tag{6}$$

A partir de là, nous pouvons prouver la Proposition 2.

Démonstration de la Proposition 2. Par l'optimalité de y, $\sum_{i=1}^n(\overline{u}_i + \overline{l}_i)x_i^* \geq \sum_{i=1}^n(\overline{u}_i + \overline{l}_i)y_i$. De manière équivalente, $\sum_{i=1}^n \overline{u}_i(x_i^* - y_i) \geq \sum_{i=1}^n \overline{l}_i(y_i - x_i^*)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i:x_i^*>y_i} \overline{u}_i(x_i^* - y_i) - \sum_{i:x_i^*<y_i} \overline{u}_i(y_i - x_i^*) \\
&\geq \sum_{i:x_i^*<y_i} \overline{l}_i(y_i - x_i^*) - \sum_{i:x_i^*>y_i} \overline{l}_i(x_i^* - y_i) \quad (7)\\
&\sum_{i:x_i^*>y_i} \overline{u}_i(x_i^* - y_i) - \sum_{i:x_i^*<y_i} \overline{l}_i(y_i - x_i^*) \\
&\geq \sum_{i:x_i^*<y_i} \overline{u}_i(y_i - x_i^*) - \sum_{i:x_i^*>y_i} \overline{l}_i(x_i^* - y_i). \quad (8)
\end{aligned}$$

Il peut être facilement vérifié que le côté droit de (8) équivaut à $\sum_{r=1}^K m(F_r)\delta(y - x^*, F_r)$. Par conséquent, il découle de (5) que $\overline{R}(x^*) \geq \sum_{r=1}^K m(F_r)\delta(y - x^*, F_r)$. Finalement, la Proposition 2 est vraie en raison de (6).

□

6 Au-delà des fonctions de croyance

Nous considérons toujours le cas où $\Omega = \{c^1, \ldots, c^l\}$ est fini, comme dans la Section 4. Cependant, dans ce contexte, les connaissances partielles sur les vecteurs de coefficients véritables sont modélisées par des mesures non additives, à savoir des capacités qui sont plus générales que les fonctions de croyance. Nous résumons rapidement quelques éléments de base adaptés de [6].

Une capacité sur Ω est une fonction d'ensemble $\mu : 2^\Omega \to [0, 1]$ telle que $\mu(\Omega) = 1, \mu(\emptyset) = 0$ et si $A \subseteq B,\ \mu(A) \leq \mu(B)$. Notez que μ est une mesure de probabilité si elle est additive, c'est-à-dire $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in 2^\Omega$ avec $A \cap B = \emptyset$. De plus, μ est une capacité 2-monotone si $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \subseteq \Omega$. Une fonction de croyance, également connue sous le nom de capacité *complètement monotone*, est une capacité 2-monotone particulière [6, 10].

Remarque 2. *En optimisation combinatoire [7], une capacité 2-monotone μ est appelée une fonction d'ensemble supermodulaire tandis que son dual $\bar{\mu}$, défini par $\bar{\mu}(A) = 1 - \mu(\Omega\backslash A)\ \forall A \subseteq \Omega$, est appelé submodulaire.*

En probabilité imprécise [4], μ est généralement appelée une probabilité inférieure *(lower probability)* où les valeurs de μ sont interprétées comme des bornes inférieures des valeurs de la mesure de probabilité véritable (encore inconnue) P^* sur Ω. Selon ce point de vue, l'ensemble dit *crédal* de μ composé de toutes les mesures de probabilité compatibles avec μ sur Ω, est défini comme $\mathcal{M}(\mu) := \{P : P(A) \geq$

$\mu(A)\ \forall A \subseteq \Omega\}$. Dorénavant, nous considérerons tout élément de $\mathcal{M}(\mu)$ comme un vecteur $p \in [0,1]^l$, et donc $\mathcal{M}(\mu)$ est un polytope :

$$\mathcal{M}(\mu) = \{p \in [0,1]^l : \sum_{i \in A} p_i \geq \mu(\{c^i : i \in A\}) \quad \forall A \subseteq \{1, \ldots, l\},\ \sum_{j=1}^{l} p_i = 1\}. \tag{9}$$

Comme il est intraitable de lister explicitement toutes les 2^l valeurs de $\mu(A)$, nous utilisons une hypothèse typique en optimisation [7, Chapitre 10].

Hypothèse 1. *Nous avons accès à un oracle d'évaluation qui renvoie $\mu(A)$ pour chaque requête $A \subseteq \Omega$.*

Nous procédons à l'extension du critère de regret minimax généralisé, discuté dans la Section 3.2, pour incorporer la notion de capacité comme suit. Le regret espéré d'une solution $x \in \mathcal{X}$ par rapport à une mesure de probabilité $p \in \mathcal{M}(\mu)$ est $\sum_{i=1}^{l} p_i R(x, c^i)$. Puisque la seule information disponible est que la véritable mesure de probabilité se trouve dans $\mathcal{M}(\mu)$, une approche raisonnable consiste à chercher une solution qui minimise le pire cas de regret espéré parmi toutes les probabilités compatibles. En d'autres termes, nous devons résoudre :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i R(x, c^i) = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right). \tag{CGMR}$$

Si μ est une fonction de croyance sur Ω et m est sa fonction de masse associée (voir Section 2), un résultat bien connu [6] stipule que

$$\max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right) = \sum_{r=1}^{K} m(F_r) \max_{c \in F_r}(c^T x - val^*(c)). \tag{10}$$

Ainsi, dans ce cas, CGMR revient à (GMR).

Remarque 3. *Si μ est 2-monotone, il est bien connu qu'un p^* qui maximise le membre de gauche de (10) peut être calculé efficacement en utilisant seulement l accès à l'oracle, comme suit [6, 7].*

On peut reindexer les éléments de Ω de telle sorte que $(c^1)^T x - val^*(c^1) \geq \ldots \geq (c^l)^T x - val^*(c^l)$ et laisser $A_j = \{c^j, \ldots, c^l\}$ $\forall j \in \{1, \ldots l\}$ et $A_{l+1} = \emptyset$. Enfin, prenons $p_j^* = \mu(A_j) - \mu(A_{j+1})$ $\forall j \in \{1, \ldots l\}$. De plus, un tel p^* est également un point extrême de $\mathcal{M}(\mu)$.

Nous montrons maintenant que sous le modèle computationnel décrit dans l'Hypothèse 1, CGMR est traitable si (P) est un problème de programmation linéaire. Soit $Ext(\mu)$ l'ensemble des points extrêmes de $\mathcal{M}(\mu)$. Cet ensemble est fini mais peut être très grand, c'est-à-dire que $|Ext(\mu)|$ est exponentiel en l. Nous observons d'abord que

$$\max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right) = \max_{p \in Ext(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right). \tag{11}$$

Proposition 3. *Si (P) est un problème de programmation linéaire et que μ est 2-monotone, alors (CGMR) peut être résolu en temps polynomial.*

Démonstration. En utilisant (11), nous reformulons (CGMR) comme suit :

$$\min t \tag{12}$$

$$t \geq \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right) \forall p \in Ext(\mu) \tag{13}$$

$$Mx \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}. \tag{14}$$

Le problème (12-14) est un problème de programmation linéaire mais il contient un grand nombre de contraintes à cause de (13). Comme (P) est un problème de programmation linéaire,

$val^*(c^i)$ est calculé en temps polynomial. Pour démontrer la solvabilité polynomial du (12-14), nous utilisons la célèbre méthode de l'ellipsoïde [7]. Selon cette méthode, nous devons montrer que le problème de séparation associé au (12-14) peut être résolu en temps polynomial : soit en confirmant qu'un point donné $(x^0, t^0) \in \mathbb{R}^n$ satisfait toutes les contraintes (13-14) soit en retournant une contrainte qu'il viole. Vérifier si (x^0, t^0) satisfait (14) peut être facilement fait en temps polynomial. De plus, vérifier si (x^0, t^0) satisfait (13) revient à tester si $t^0 \geq \max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x^0 - val^*(c^i)\right)$, ce qui peut être fait en temps polynomial grâce à la Remarque 3. Nous concluons sur le fait que le problème de séparation, et donc le problème (12-14) est polynomialement solvable. □

Remarque 4. *En raison de la popularité du critère de regret minimax, des formes similaires à (CGMR) sont déjà apparues dans la littérature de l'optimisation sous incertitude distributionnelle, pour n'en citer que quelques-unes [2, 3]. Cependant, à notre connaissance, la Proposition 3 est nouvelle.*

Notez que l'algorithme de l'ellipsoïde est théoriquement polynomial, mais il est connu pour être lent en pratique : en fait, son temps d'exécution en pratique est lent comparé à d'autres algorithmes comme la méthode du simplex, bien que cette dernière ne soit pas un algorithme polynomial [7]. Par conséquent, des approches alternatives sont nécessaires. Notez que la fonction $f(x) := \max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right)$ est convexe en x (c'est un maximum ponctuel *(pointwise maximum)* de fonctions affines). Par conséquent, (CGMR) est un problème d'optimisation convexe. Une approche standard pour le résoudre consiste à utiliser des méthodes de sous-gradient [9], où un sous-gradient de f est requis à chaque itération. Rappelons qu'un sous-gradient de f en x est un vecteur η tel que $f(y) \geq f(x) + \eta^T(y - x)\ \forall y$. Le résultat suivant découle de calculs standards en analyse convexe. Pour être plus complets, nous incluons une preuve.

Proposition 4. *Pour tout x, soit $p^* \in \text{argmax}_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right)$. Alors $\eta := \sum_{i=1}^{l} p_i^* c^i$ est un sous-gradient de f.*

Démonstration. Pour tout y,

$$f(y) =$$
$$\max_{p \in \mathcal{M}(\mu)} \sum_{i=1}^{l} p_i \left((c^i)^T x - val^*(c^i) + (c^i)^T(y - x)\right)$$

Par l'optimalité de p^*,

$$f(y) \geq$$
$$\sum_{i=1}^{l} p_i^* \left((c^i)^T x - val^*(c^i)\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{l} (p_i^* c^i)^T (y - x) = f(x) + \eta^T(y - x)$$

□

Grâce à la Remarque 3 et à la Proposition 4, dans le cas des capacités 2-monotones, un sous-gradient de f peut être calculé efficacement.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons utilisé le critère de regret minimax généralisé pour des problèmes d'optimisation avec des fonctions objectives incertaines, où l'incertitude est modélisée par des fonctions de croyance et, plus généralement, par des capacités. Nous avons identifié quelques cas traitables et développé une méthode de 2-approximation lorsqu'il s'agit de produits cartésiens d'intervalles pour les ensembles focaux des fonctions de croyance considérées. Les travaux futurs incluent l'application des méthodes de sous-gradient au problème (CGMR) pour les problèmes de programmation linéaire ou l'investigation des problèmes (GMR) et (CGMR) pour certains problèmes combinatoires pratiques.

Références

[1] Adam, L., Destercke, S. : Possibilistic preference elicitation by minimax regret. In : Uncertainty in artificial intelligence. pp. 718–727. PMLR (2021)

[2] Agarwal, A., Zhang, T. : Minimax regret optimization for robust machine learning under distribution shift. In : Conference on Learning Theory. pp. 2704–2729. PMLR (2022)

[3] Al Taha, F., Yan, S., Bitar, E. : A distributionally robust approach to regret optimal control using the Wasserstein distance. In : 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). pp. 2768–2775. IEEE (2023)

[4] Augustin, T., Coolen, F.P., De Cooman, G., Troffaes, M.C. : Introduction to imprecise probabilities. John Wiley & Sons (2014)

[5] Conde, E. : A 2-approximation for minmax regret problems via a mid-point scenario optimal solution. Oper. Res. Lett. **38**(4), 326–327 (2010)

[6] Grabisch, M. : Set functions, games and capacities in decision making, vol. 46. Springer (2016)

[7] Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A. : Geometric algorithms and combinatorial optimization. Springer (1993)

[8] Kasperski, A., Zieliński, P. : Robust discrete optimization under discrete and interval uncertainty : A survey. Robustness analysis in decision aiding, optimization, and analytics pp. 113–143 (2016)

[9] Nesterov, Y. : Lectures on convex optimization, vol. 137. Springer (2018)

[10] Shafer, G. : A mathematical theory of evidence. Princeton university press (1976)

[11] Vu, T.A., Afifi, S., Lefèvre, E., Pichon, F. : Optimization problems with evidential linear objective. Int. J. Approx. Reason. **161**, 108987 (2023)

[12] Wasserman, L.A. : Belief functions and statistical inference. Can. J. Stat. **18**(3), 183–196 (1990)

[13] Yager, R.R. : Decision making using minimization of regret. Int. J. Approx. Reason. **36**(2), 109–128 (2004)