

Problème du plus court chemin avec poids évidentiels : Modélisation et résolution

Shortest path problem with evidential weights : modeling and solving

Tuan-Anh Vu¹

Sohaib Afifi¹

Éric Lefèvre¹

Frédéric Pichon¹

¹ Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

F-62400 Bethune, France

{tanh.vu, prénom.nom}@univ-artois.fr

Résumé :

Dans cet article, nous étudions le problème du plus court chemin d'une source unique à une destination unique dans un graphe où l'information sur les poids des arcs est modélisée par une fonction de croyance. Dans ce contexte, nous considérons trois critères classiques pour comparer les chemins en fonction de leurs poids : le critère d'Hurwicz généralisé, le critère de dominance forte et le critère de dominance faible. Nous montrons que, selon ces critères, dans le cas particulier où les éléments focaux de la fonction de croyance sont des produits cartésiens d'intervalles, trouver les meilleurs chemins, c'est-à-dire les chemins non dominés, revient à résoudre des variantes connues du problème déterministe du plus court chemin, pour lequel il existe des algorithmes de résolution exacte.

Mots-clés :

Problème du plus court chemin, Fonction de croyance, Méthode exacte.

Abstract:

We study the single source single destination shortest path problem in a graph where information about arc weights is modelled by a belief function. We consider three common criteria to compare paths with respect to their weights in this setting : generalized Hurwicz, strong dominance and weak dominance. We show that in the particular case where the focal sets of the belief function are Cartesian products of intervals, finding best, *i.e.*, non-dominated, paths according to these criteria amounts to solving known variants of the deterministic shortest path problem, for which exact resolution algorithms exist.

Keywords:

Shortest path problem, Belief function, Exact method.

1 Introduction

Le problème du plus court chemin (SPP) est l'un des problèmes les plus étudiés en optimisation combinatoire avec des applications dans de nombreux domaines comme les transports et les télécommunications. Très souvent dans des situations réelles, les poids des arcs sont entachés d'incertitude; par exemple, les temps de trajet entre les villes peuvent être affectés par des facteurs externes tels que les conditions météo ou

les embouteillages. De nombreuses approches ont été proposées pour modéliser l'incertitude sur les poids des arcs. En particulier, le cadre de l'optimisation robuste où l'incertitude est représentée par des ensembles de scénarios discrets [15, 3] ou par des intervalles [3, 11].

Dans cet article, nous étudions le cas où l'incertitude sur les poids des arcs est *evidentielle*, c'est-à-dire modélisée par une fonction de croyance [13]. Plus précisément, nous supposons que chaque élément focal de la fonction de croyance considérée est un produit cartésien d'intervalles où chaque intervalle décrit les valeurs possibles du poids d'un arc. Une telle fonction de croyance est une généralisation directe et naturelle de la représentation de l'incertitude basée sur les intervalles mentionnée ci-dessus, qui survient lorsque l'on considère que des probabilités peuvent être associées à ces intervalles. Elle peut être illustrée comme suit : dans un réseau comportant trois villes A, B et C, si les conditions météorologiques sont bonnes, il faut 20 à 30 minutes pour aller de A à B, et 10 à 20 minutes pour aller de B à C ; cependant, en cas de mauvais temps, le trajet de A à B (resp. de B à C) prend 30 à 40 minutes (resp. 15 à 25 minutes) et les prévisions nous indiquent que la probabilité de beau temps (resp. de mauvais temps) est 0.8 (resp. 0.2).

En présence d'une incertitude évidentielle sur les poids des arcs, la notion de meilleur chemin, c'est-à-dire de chemin le plus court, devient mal définie. De façon similaire à celle de [3] et en utilisant la théorie de la décision sous incertitude évidentielle [9], les meilleurs chemins sont

définis, dans cet article, comme étant ceux qui ne sont pas dominés par rapport à une relation de préférence sur les chemins. Cette relation de préférence est construite à partir d'un critère reposant sur les notions de poids espérés supérieur et inférieur des chemins. Nous considérons en particulier trois critères classiques, appelés Hurwicz généralisé, dominance forte et dominance faible. Le premier induit une relation de préférence complète tandis que les deux derniers induisent des relations partielles conduisant, comme nous le verrons, à des problèmes d'optimisation plus difficiles.

Les problèmes d'optimisation combinatoire sous incertitude évidentielle ont reçu une certaine attention récemment. Notamment, dans [8, 14], les auteurs ont étudié différentes variantes du problème de tournées de véhicules (VRP) avec différents facteurs d'incertitude et avec des éléments focaux particuliers similaires à ceux de cet article. Ils ont proposé des méthodes de résolution approchée basées sur des métaheuristiques pour trouver des solutions non dominées par rapport à une relation complète construite à partir d'un cas particulier du critère de Hurwicz généralisé. Guillaume *et al.* [6] ont étudié un problème d'optimisation générale dans lequel les coefficients de la fonction objectif sont sujets à l'incertitude. Ils ont également considéré le critère de Hurwicz généralisé et ont fourni des résultats sur la complexité de la recherche d'une solution non dominée.

Contrairement à [8, 14], nous présentons dans cet article des méthodes *exactes* pour trouver des solutions non dominées en ce qui concerne les relations complètes *et partielles*, en raison du fait que le SPP est beaucoup plus simple que le VRP. De plus, bien que Guillaume *et al.* [6] aient montré qu'en général il est impossible, dans un temps raisonnable, de trouver les meilleures solutions, nos résultats indiquent que cela peut néanmoins être fait lorsque les éléments focaux sont d'un type particulier. Enfin, nous pouvons noter que les problèmes d'optimisation particuliers que nous considérons nous permettent de profiter d'algorithmes spécialisés

(liés au SPP), contrairement à [12] qui fournit également des moyens de trouver les meilleurs éléments selon certains critères, tels que la dominance forte, mais qui ne peut pas bénéficier de tels algorithmes spécialisés car leur travail se place dans un cadre plus général.

La suite de l'article est organisée de la manière suivante. La Section 2 rappelle le problème déterministe du plus court chemin et les principes de base des fonctions de croyance. La section 3 est consacrée à la formalisation et à la résolution du SPP lorsque les poids des arcs sont représentés par des fonctions de croyance. Cet article se termine par une conclusion dans la Section 4.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons les notions nécessaires à la compréhension du reste de l'article.

2.1 Problème déterministe du plus court chemin

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté avec un ensemble de sommets V , un ensemble d'arcs A et un poids $c_{ij} > 0$ pour chaque arc (i, j) dans A . Soit s et t deux sommets dans V appelés respectivement la source et la destination. Soit \mathcal{X} l'ensemble de tous les chemins s - t dans G avec l'hypothèse que $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Si tous les poids des arcs c_{ij} sont connus, alors la recherche d'un s - t plus court chemin, *i.e.*, un s - t chemin de plus petit poids, peut être modélisée comme le problème d'optimisation suivant

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} p_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{(s,i) \in A} p_{si} - \sum_{(j,s) \in A} p_{js} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{(t,i) \in A} p_{ti} - \sum_{(j,t) \in A} p_{jt} = -1 \quad (3)$$

$$\sum_{(k,i) \in A} p_{ki} - \sum_{(j,k) \in A} p_{jk} = 0, \forall k \in V \setminus \{s, t\} \quad (4)$$

$$p_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A \quad (5)$$

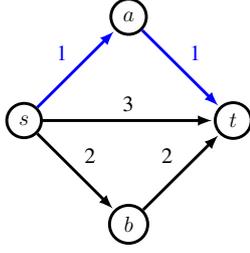


FIGURE 1 – Graphe représentant l'ensemble des chemins, où le chemin le plus court entre les sommets s et t est s - a - t .

où chaque chemin dans \mathcal{X} est identifié à un ensemble $p = \{p_{ij} | (i, j) \in A\}$ dont l'élément $p_{ij} = 1$ si l'arc (i, j) est dans le chemin et $p_{ij} = 0$ sinon.

Exemple 1. Si nous considérons le graphe orienté représenté sur la Figure 1, l'ensemble de tous les chemins s - t est $\mathcal{X} = \{s$ - a - t, s - b - t, s - $t\}$ et s - a - t est le plus court chemin s - t avec un poids de 2.

2.2 Rappel sur les fonctions de croyance

Soit $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ l'ensemble, appelé cadre de discernement, de toutes les valeurs possibles d'une variable θ . Dans la théorie des fonctions de croyance [13], une connaissance partielle de la vraie valeur (inconnue) de θ est représentée par une application $m : 2^\Theta \mapsto [0, 1]$ appelée fonction de masse et telle que $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$ et $m(\emptyset) = 0$, où la masse $m(A)$ quantifie la croyance allouée au fait de savoir que $\theta \in A$. Au regard des connaissances actuelles, cette part de croyance ne peut être attribuée à un sous-ensemble de A . Un sous-ensemble $A \subseteq \Theta$ est appelé un élément focal de m si $m(A) > 0$.

Supposons que θ représente l'état de la nature et que sa vraie valeur est connue sous la forme d'une fonction de masse m . Supposons en outre qu'un décideur (DM) doit choisir une action (décision) f parmi un ensemble fini \mathcal{Q} , où chaque action $f \in \mathcal{Q}$ induit un coût $l(f, \theta_i)$ pour chaque état de nature possible $\theta_i \in \Theta$. Dans ce contexte, la préférence du DM sur les actions est dénotée par \preceq , où $f \preceq g$ signifie que l'action f est préférée à l'action g . La relation \preceq

est complète si pour deux actions quelconques f et g , $f \preceq g$ ou $g \preceq f$, sinon, elle est partielle. De plus, f est strictement préférée (resp. équivalent) à g , qui est notée par $f \prec g$ (resp. $f \sim g$), si $f \preceq g$ mais pas $g \preceq f$ (resp. si $f \preceq g$ et $g \preceq f$). Enfin, la relation \preceq est généralement supposée réflexive et transitive.

Typiquement, le DM cherche des éléments dans l'ensemble Opt des actions non dominées :

$$Opt = \{f \in \mathcal{Q} : \nexists g \text{ tel que } g \prec f\}. \quad (6)$$

Si la relation \preceq est complète, trouver un élément dans Opt est suffisant vu que les éléments dans Opt sont préférés de manière égale entre eux et strictement préférés au reste $\mathcal{Q} \setminus Opt$. Dans ce cas, les éléments de Opt sont également appelés actions optimales. D'autre part, si la relation \preceq est partielle, le DM peut avoir besoin d'identifier tous les éléments dans Opt .

Habituellement, le DM construit sa préférence sur les actions en fonction d'un certain critère. Nous notons par \preceq_{cr} sa préférence selon un critère cr et par Opt_{cr} son ensemble associé d'actions non dominées (ou meilleures). Dans cet article, nous considérons trois critères classiques définis comme suit pour deux actions quelconques f et g [9] :

1. Critère de Hurwicz généralisé : $f \preceq_{hu} g$ si

$$\alpha \bar{E}_m(f) + (1 - \alpha) \underline{E}_m(f) \leq \alpha \bar{E}_m(g) + (1 - \alpha) \underline{E}_m(g) \quad (7)$$

pour un paramètre fixe $\alpha \in [0, 1]$, et où $\bar{E}_m(f)$ et $\underline{E}_m(f)$ signifient, respectivement, les coûts espérés supérieur et inférieur de l'action f par rapport à la fonction de masse m définis comme suit

$$\bar{E}_m(f) = \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) \max_{\theta_i \in A} l(f, \theta_i), \quad (8)$$

$$\underline{E}_m(f) = \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) \min_{\theta_i \in A} l(f, \theta_i). \quad (9)$$

La relation \preceq_{hu} est complète et nous avons $f \prec_{hu} g$ si (7) est stricte.

2. Critère de dominance forte : $f \preceq_{str} g$ si

$$\overline{E}_m(f) \leq \underline{E}_m(g). \quad (10)$$

La relation \preceq_{str} est partielle et nous avons $f \prec_{str} g$ si (10) est stricte.

3. Critère de dominance faible : $f \preceq_{weak} g$ si

$$\begin{aligned} \overline{E}_m(f) &\leq \overline{E}_m(g) \text{ and} \\ \underline{E}_m(f) &\leq \underline{E}_m(g). \end{aligned} \quad (11)$$

La relation \preceq_{weak} est partielle et nous avons $f \prec_{weak} g$ si au moins une inégalité dans (11) est stricte.

3 Problème du plus court chemin avec des poids évidentiels

Dans cette section, nous formalisons ce que nous entendons par meilleurs chemins dans un graphe avec des poids évidentiels et nous donnons des méthodes pour trouver de tels chemins.

3.1 Modélisation

Supposons que les poids des arcs c_{ij} , pour tous les $(i, j) \in A$, du graphe introduit dans la section 2.1 ne sont que partiellement connus. Plus précisément, nous considérons le cas où l'information sur les poids des arcs est modélisée par une fonction de masse. Formellement, notons Ω_{ij} le cadre de discernement pour la variable c_{ij} , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles pour le poids c_{ij} et $\Omega := \times_{(i,j) \in A} \Omega_{ij}$. Un scénario quelconque sera noté $c \in \Omega$. Un scénario représente une affectation possible de valeurs pour tous les poids du graphe. Une fonction de masse m sur Ω , avec l'ensemble des ensembles focaux noté par $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_K\}$, représente alors l'incertitude sur les poids des arcs.

Exemple 2. Soit c^1 et c^2 les deux scénarios représentés par les Figures 2a et 2b, respectivement. La fonction de masse m telle que $m(F_1) = 0.4$ et $m(F_2) = 0.6$, avec $F_1 = \{c^1, c^2\}$ et $F_2 = \{c^1\}$, représente la connaissance partielle des poids des arcs.

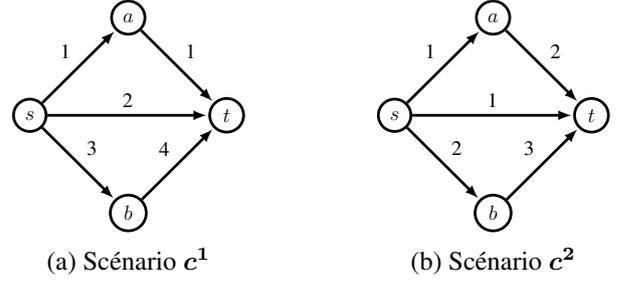


FIGURE 2 – Deux affectations différentes de poids sur les arcs illustrant deux scénarios.

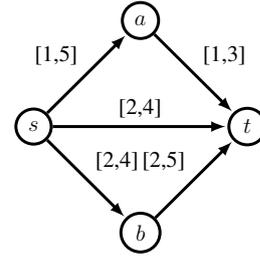


FIGURE 3 – Graphe où les poids sur les arcs sont représentés par des intervalles.

Comme nous le verrons, il est utile de faire une hypothèse particulière sur la nature des éléments focaux de m . Cette hypothèse, notée CI en abrégé, est la suivante : chaque élément focal de m peut être exprimé comme un produit cartésien d'intervalles, i.e., $F_r = \times_{(i,j) \in A} [l_{ij}^r, u_{ij}^r]$ pour tout $r \in \{1, \dots, K\}$. Un tel élément focal est illustré par l'exemple 3.

Exemple 3. Soit F le produit cartésien d'intervalles (représenté par la Figure 3) :

$$\begin{aligned} F &= [l_{sa}, u_{sa}] \times [l_{sb}, u_{sb}] \times [l_{st}, u_{st}] \\ &\times [l_{at}, u_{at}] \times [l_{bt}, u_{bt}] \\ &= [1, 5] \times [2, 4] \times [2, 4] \times [1, 3] \times [2, 5]. \end{aligned}$$

F est un sous-ensemble de Ω : il inclut, par exemple, le scénario $c = \{c_{sa}, c_{sb}, c_{st}, c_{at}, c_{bt}\}$ avec $c_{sa} = 1, c_{sb} = 3, c_{st} = 2, c_{at} = 1$, et $c_{bt} = 3$.

Dans le cas où les poids des arcs sont évidentiels (c'est-à-dire qu'il existe une certaine incertitude concernant leur valeur exacte et que cette incertitude est représentée par une fonction de masse m sur Ω), la préférence sur les $s-t$ chemins par rapport à leurs poids (incertains) peut

être établie en utilisant le cadre de décision rappelé dans la section 2.2. Plus précisément, l'ensemble Ω des scénarios représente les états de la nature possibles. L'ensemble \mathcal{X} des s - t chemins représente les actions possibles. Le poids $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} p_{ij}$ du chemin $p = \{p_{ij} | (i,j) \in A\} \in \mathcal{X}$ sous le scénario $\mathbf{c} = \{c_{ij} | (i,j) \in A\} \in \Omega$ représente le coût $l(p, \mathbf{c})$ de choisir le chemin p (action) pour le scénario (état de la nature) \mathbf{c} . La préférence sur les s - t chemins, et les meilleurs s - t chemins associés, peuvent alors être définis en utilisant l'un des trois critères rappelés dans la section 2.2.

Dans la section suivante, les principaux résultats de cet article, qui concernent les meilleurs s - t chemins selon ces trois critères et sous l'hypothèse CI, sont présentés.

3.2 Résolutions

Dans cette section, des méthodes pour trouver les meilleurs chemins selon, tour à tour, les critères de Hurwicz généralisé, de dominance forte et de dominance faible, sont fournies. Nous pouvons remarquer que ces critères reposent sur les notions de coûts espérés supérieurs et inférieurs des actions, les actions correspondant dans notre cas aux chemins. Ces coûts $\bar{E}_m(p)$ et $\underline{E}_m(p)$ d'un chemin p peuvent être calculés facilement sous l'hypothèse CI.

Proposition 1. *Sous l'hypothèse CI, nous avons*

$$\bar{E}_m(p) = \sum_{(i,j) \in A} \bar{u}_{ij} p_{ij} \quad (12)$$

$$\underline{E}_m(p) = \sum_{(i,j) \in A} \bar{l}_{ij} p_{ij} \quad (13)$$

avec $\bar{u}_{ij} := \sum_{r=1}^K m(F_r) u_{ij}^r$ et $\bar{l}_{ij} := \sum_{r=1}^K m(F_r) l_{ij}^r$ pour tous $(i,j) \in A$.

Démonstration. Par définition, les coûts espé-

rés supérieurs et inférieurs du chemin p sont

$$\bar{E}_m(p) = \sum_{r=1}^K m(F_r) \max_{\mathbf{c}^r \in F_r} \left(\sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^r p_{ij} \right), \quad (14)$$

$$\underline{E}_m(p) = \sum_{r=1}^K m(F_r) \min_{\mathbf{c}^r \in F_r} \left(\sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^r p_{ij} \right). \quad (15)$$

Le maximum et le minimum internes dans (14) et (15) sont obtenus lorsque chaque poids d'arc c_{ij}^r dans le scénario \mathbf{c}^r est égal à u_{ij}^r et l_{ij}^r , respectivement. En regroupant les termes, nous arrivons au résultat souhaité. \square

La proposition 1 est déterminante pour découvrir des méthodes exactes permettant de trouver les meilleurs s - t chemins.

Critère de Hurwicz généralisé. Comme la relation \preceq_{hu} est complète, il suffit de trouver un élément de l'ensemble Opt_{hu} , comme expliqué dans la section 2.2. Pour trouver un tel élément, c'est-à-dire un meilleur chemin selon le critère de Hurwicz généralisé, nous devons résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\min \alpha \bar{E}_m(p) + (1 - \alpha) \underline{E}_m(p) \quad (16)$$

$$p \in \mathcal{X}. \quad (17)$$

La complexité du problème (16-17), dans le cas d'éléments focaux généraux, a été étudiée dans la littérature. Si $\alpha = 1$, le problème est déjà faiblement NP-difficile dans le cas où la fonction de masse m a un seul élément focal contenant deux éléments [15]. Si $\alpha = 0$, le problème est encore plus difficile : il est fortement NP-difficile et non approximable [6, Théorème 1]. Cependant, avec l'hypothèse CI, le problème (16-17) devient beaucoup plus facile à résoudre.

Proposition 2. *Sous l'hypothèse CI, résoudre le problème (16-17) revient à résoudre le SPP dans le graphe $G = (V, A)$ avec les poids des arcs $c_{ij} = \alpha \bar{u}_{ij} + (1 - \alpha) \bar{l}_{ij}$.*

Démonstration. En utilisant la Proposition 1, le

problème (16-17) devient

$$\min \sum_{(i,j) \in A} (\alpha \bar{u}_{ij} + (1 - \alpha) \bar{l}_{ij}) p_{ij} \quad (18)$$

$$\text{avec } p_{ij} \text{ satisfaisant (2-5)} \quad \forall (i, j) \in A \quad (19)$$

□

Selon la Proposition 2, pour trouver un élément dans Opt_{hu} , nous pouvons utiliser un algorithme rapide pour le SPP tel que [4].

Critère de dominance forte. Comme la relation \preceq_{str} est partielle, il peut être nécessaire de trouver tous les éléments de l'ensemble Opt_{str} , *i.e.*, tous les meilleurs chemins selon le critère de dominance forte.

Proposition 3. *Sous l'hypothèse CI, trouver tous les éléments dans Opt_{str} revient à trouver tous les chemins, dans le graphe $G = (V, A)$ avec des poids d'arc $c_{ij} = \bar{l}_{ij}$, dont les poids sont inférieurs ou égaux à $\bar{d}_* := \min_{q \in \mathcal{X}} \bar{E}_m(q)$.*

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} p \in Opt_{str} &\Leftrightarrow \nexists q \in \mathcal{X} \text{ tel que } \bar{E}_m(q) < \underline{E}_m(p) \\ &\Leftrightarrow \forall q \in \mathcal{X} \text{ alors } \bar{E}_m(q) \geq \underline{E}_m(p) \\ &\Leftrightarrow \min_{q \in \mathcal{X}} \bar{E}_m(q) \geq \underline{E}_m(p) \end{aligned}$$

En tant que cas particulier de la Proposition 2, lorsque $\alpha = 1$, $\min_{q \in \mathcal{X}} \bar{E}_m(q)$ peut être obtenu en résolvant le SPP déterministe dans G avec des poids d'arc $c_{ij} = \bar{u}_{ij}$. D'après la Proposition 1, nous avons $\underline{E}_m(p) = \sum_{(i,j) \in A} \bar{l}_{ij} p_{ij}$. Par conséquent, pour trouver p tel que $\underline{E}_m(p) \leq \bar{d}_*$, nous fixons les poids des arcs c_{ij} de G à \bar{l}_{ij} et trouver tous les éléments dans Opt_{str} revient à trouver tous les s - t chemins dans G dont les poids sont inférieurs ou égaux à \bar{d}_* . □

Pour trouver tous les éléments de Opt_{str} , nous pouvons utiliser des algorithmes efficaces tels que celui de [1], où les auteurs ont étudié un problème de détermination de chemins proches de l'optimum. Dans le cadre de leur travail, ils

souhaitaient, par exemple, trouver tous les s - t chemins dans un graphe orienté dont les poids ne dépassent pas de plus de 10% le poids le plus faible, ce qui revient à trouver tous les chemins dont les poids sont inférieurs ou égaux à une valeur donnée.

Critère de dominance faible. De même que pour le critère de dominance forte, il est peut être nécessaire de trouver tous les éléments de l'ensemble Opt_{weak} puisque \preceq_{weak} est partiel. Il existe un lien direct entre le critère de dominance faible et l'optimisation bi-objectif. Un problème d'optimisation bi-objectif peut être exprimé comme suit

$$\min f_1(x) \quad (20)$$

$$\min f_2(x) \quad (21)$$

$$x \in X \quad (22)$$

Comme les objectifs (20-21) sont typiquement conflictuels, il n'existe généralement aucune solution x qui minimise simultanément $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Nous cherchons plutôt à trouver toutes les solutions dites efficaces de (20-22) : une solution x est efficace s'il n'existe aucune solution réalisable $y \in X$ telle que $f_1(y) \leq f_1(x)$ et $f_2(y) \leq f_2(x)$ où au moins une des inégalités est stricte. Le SPP bi-objectif est un problème d'optimisation bi-objectif particulier. Supposons que chaque arc (i, j) dans G possède deux attributs déterministes c_{ij} et t_{ij} qui décrivent, par exemple, respectivement la distance et le temps de parcours de i à j . Le but est de trouver toutes les solutions efficaces, c'est-à-dire tous les s - t chemins du problème suivant

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} p_{ij} \quad (23)$$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} p_{ij} \quad (24)$$

$$\text{avec } p_{ij} \text{ satisfaisant (2-5)} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (25)$$

Proposition 4. *Sous l'hypothèse CI, trouver tous les éléments de Opt_{weak} revient à trouver toutes les solutions efficaces d'un SPP bi-objectif dans le graphe G où chaque arc $(i, j) \in A$ a deux attributs \bar{u}_{ij} et \bar{l}_{ij} .*

Démonstration. Trouver tous les éléments de Opt_{weak} est équivalent à trouver toutes les solutions efficaces $p \in \mathcal{X}$ d'un problème d'optimisation bi-objectif avec des objectifs $f_1(p) := \bar{E}_m(p)$ et $f_2(p) := \underline{E}_m(p)$, qui, en utilisant la Proposition 1, se ramène à un SPP bi-objectif dans le graphe G où chaque arc (i, j) a deux attributs \bar{u}_{ij} et \bar{l}_{ij} . \square

Pour trouver tous les éléments de Opt_{weak} , nous pouvons utiliser des algorithmes rapides développés pour le SPP bi-objectif tels que celui de [5].

3.3 Les tailles de Opt_{weak} et de Opt_{str} .

Il est évident que si $p \prec_{str} q$ alors $p \prec_{weak} q$, et que la réciproque n'est pas vraie, donc $Opt_{weak} \subseteq Opt_{str}$. L'exemple 4 illustre que $Opt_{weak} \subset Opt_{str}$ en général.

Exemple 4. *Supposons que l'élément focal de la Figure 3 soit le seul élément focal de la fonction de masse considérée. Il existe trois s-t chemins dont les coûts espérés inférieurs et supérieurs sont indiqués entre parenthèses : s-a-t : (2, 8); s-t : (2, 4); s-b-t : (4, 9). Nous avons $Opt_{str} = \{s-a-t, s-t, s-b-t\}$ et $Opt_{weak} = \{s-t\}$.*

Les ensembles Opt_{weak} et Opt_{str} peuvent être très grands, de sorte que l'énumération de leurs éléments peut prendre beaucoup de temps. En fait, il est montré dans [7, Théorème 1] que dans le pire des cas, la taille de l'ensemble des chemins efficaces croît exponentiellement avec $|V|$. Il est donc utile de pouvoir connaître à l'avance la taille de ces ensembles, sans avoir à énumérer explicitement les éléments. La proposition suivante est un premier résultat dans cette direction.

Proposition 5. *Si \bar{d}_* et \bar{l}_{ij} dans la Proposition 3 sont des nombres rationnels, $|Opt_{str}|$ (et donc une borne supérieure de $|Opt_{weak}|$) peut être calculée en $O(|V|^2 \times W)$, avec $W = \bar{d}_* \times D$ où D est un dénominateur commun de \bar{d}_* et de \bar{l}_{ij} , pour tous les $(i, j) \in A$.*

Démonstration. Par la suite, nous considérons le graphe G avec des poids d'arc entiers $c_{ij} = \bar{l}_{ij} \times D$. Il est facile de montrer que $|Opt_{str}|$ est égal au nombre de s-t chemins dans G dont les poids sont inférieurs ou égaux à la valeur entière W . De plus, notons $|V| = n$ et supposons, sans perte de généralité, que les sommets sont indexés par $0, \dots, n-1$, avec 0 et $n-1$ les sommets source et destination, respectivement. Notons par $N_w(i)$ le nombre de chemins dans G de i à $n-1$ dont les poids sont inférieurs ou égaux à w , nous devons alors calculer $N_W(0)$ puisqu'il est égal à $|Opt_{str}|$.

Nous avons de façon évidente, pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$ et tout $w \in \{1, \dots, W\}$,

$$N_w(i) = \sum_{j \text{ tel que } (i,j) \in A \text{ et } c_{ij} \leq w} N_{w-c_{ij}}(j), \quad (26)$$

avec $N_0(i) = 0$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$ et $N_w(n-1) = 1$, pour tout $w \in \{0, \dots, W\}$.

Considérons un tableau M en 2 dimensions de taille $(W+1) \times n$, dont chaque cellule $M[w][i]$, $w \in \{0, \dots, W\}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, est destinée à stocker $N_w(i)$. En initialisant toutes les cellules de M à 0, sauf la dernière colonne qui est initialisée à 1, et en remplissant M ligne par ligne selon (26) en commençant par la ligne $w = 0$, chaque cellule $M[w][i]$ contient $N_w(i)$. Le calcul de chaque ligne de M coûte $O(|V|^2)$. Ceci nous amène à la complexité souhaitée. \square

Nous notons qu'étant donné [10, Théorème 1] et la preuve ci-dessus, le calcul de $|Opt_{str}|$ est en réalité NP-difficile et en fait #P-complet si G est acyclique. Néanmoins, en pratique, W dans la Proposition 5 peut ne pas être trop grand, de sorte que le calcul de $|Opt_{str}|$ peut être assez rapide.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons considéré le cas où l'incertitude sur les poids dans un graphe est représentée par une fonction de masse. Nous avons proposé des extensions de la notion de

plus court chemin à ce contexte, comme les ensembles de chemins non dominés selon les critères de Hurwicz généralisé, de dominance forte et de dominance faible. Nous avons montré que si les éléments focaux de la fonction de masse sont des produits cartésiens d'intervalles, ces ensembles peuvent être trouvés en appliquant des algorithmes développés pour des variantes du SPP déterministe. Les travaux futurs incluent considérer d'autres critères telle que la maximalité [2].

Références

- [1] T. H. BYERS et M. S. WATERMAN : Determining all optimal and near-optimal solutions when solving shortest path problems by dynamic programming. *Oper. Res.*, 32(6):1381–1384, 1984.
- [2] T. DENOEU : Decision-making with belief functions : a review. *Int. J. Approx. Reason.*, 109:87–110, 2019.
- [3] L. C. DIAS et J. N. CLÍMACO : Shortest path problems with partial information : models and algorithms for detecting dominance. *Eur. J. Oper. Res.*, 121(1):16–31, 2000.
- [4] E. W. DIJKSTRA : A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [5] D. DUQUE, L. LOZANO et A. L. MEDAGLIA : An exact method for the biobjective shortest path problem for large-scale road networks. *Eur. J. Oper. Res.*, 242(3): 788–797, 2015.
- [6] R. GUILLAUME, A. KASPERSKI et P. ZIELIŃSKI : Robust optimization with scenarios using random fuzzy sets. *In Proc. of FUZZ-IEEE 2021*, pages 1–6. IEEE, 2021.
- [7] P. HANSEN : Bicriterion path problems. *In* Günter FANDEL et Tomas GAL, éditeurs : *Multiple criteria decision making theory and application*, pages 109–127. Springer, 1980.
- [8] N. HELAL, F. PICHON, D. PORUMBEL, D. MERCIER et E. LEFÈVRE : The capacitated vehicle routing problem with evidential demands. *Int. J. Approx. Reason.*, 95:124–151, 2018.
- [9] L. MA et T. DENOEU : Partial classification in the belief function framework. *Knowl. Based Syst.*, 214:106742, 2021.
- [10] M. MIHALÁK, R. SRÁMEK et P. WIDMAYER : Approximately counting approximately-shortest paths in directed acyclic graphs. *Theory Comput. Syst.*, 58(1):45–59, 2016.
- [11] R. MONTEMANNI et L. M. GAMBARDILLA : An exact algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Comput. Oper. Res.*, 31(10):1667–1680, 2004.
- [12] N. NAKHARUTAI, M. C. M. TROFFAES et C. C. S. CAIADO : Improving and benchmarking of algorithms for γ -maximin, γ -maximax and interval dominance. *Int. J. Approx. Reason.*, 133:95–115, 2021.
- [13] G. SHAFER : *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press, 1976.
- [14] T. TEDJINI, S. AFIFI, F. PICHON et E. LEFÈVRE : The vehicle routing problem with time windows and evidential service and travel times : A recourse model. *In* Jirina VEJNAROVÁ et Nic WILSON, éditeurs : *Proc. of ECSQARU 2021*, pages 381–395. Springer, 2021.
- [15] G. YU et J. YANG : On the robust shortest path problem. *Comput. Oper. Res.*, 25(6): 457–468, 1998.