

Traitement d'images et théorie des fonctions de croyance

Image processing and belief functions theory

P. Vannoorenberghe¹

E. Lefevre²

O. Colot³

¹ Laboratoire Perception Systèmes Information, FRE 2645 CNRS

Université de Rouen, Place Emile Blondel, 76821 Mont Saint Aignan cedex

Patrick.Vannoorenberghe@univ-rouen.fr

² Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois

Université d'Artois, FSA Technoparc Futura, 62400 Béthune cedex

Eric.Lefevre@iut-geii.univ-artois.fr

³ Laboratoire d'Automatique I3D, FRE 2497 CNRS

Université des Sciences et Technologies de Lille, Bâtiment P2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex

Olivier.Colot@univ-lille1.fr

Résumé :

Dans ce papier, quelques applications de la théorie des fonctions de croyance en traitement d'images sont présentées. La segmentation d'images couleur est tout d'abord abordée sous la forme d'un problème de classification pixellaire. L'idée consiste à construire une partition de l'ensemble des données dans l'espace colorimétrique. L'algorithme proposé tend à stabiliser cette partition de manière itérative vis-à-vis d'une règle de décision. La règle choisie est l'extension aux fonctions de croyance des k plus proches voisins permettant ainsi d'obtenir une partition crédale. Nous présentons ensuite un filtre de convolution crédale. Ce filtre peut être utilisé pour différentes opérations notamment en filtrage d'images ou en détection de contours. Enfin, nous illustrons l'utilité de la théorie des fonctions de croyance dans le cadre de la segmentation d'images couleur.

Mots-Clés :

Fonctions de croyance, Traitement d'images, classification évidentielle, segmentation, convolution.

Abstract:

In this paper, we present several applications of belief functions to image processing. Color image segmentation is first formalized as a pixel classification problem. The idea consists in making a partition of a data set in the color space. The proposed algorithm leads to stabilize iteratively this partition towards a decision rule. We choose the extension of k nearest neighbors to belief functions in order to obtain a credal partition. We present finally a credal convolution filter. This filter can be used to several image processing operations including noise filtering and edge detection. Utility of belief functions is illustrated within the framework of color image segmentation.

Keywords:

Belief functions, Image processing, evidential clustering, segmentation, convolution.

1 Introduction

La théorie des fonctions de croyance (ou théorie de l'évidence) est fondée sur les travaux d'A. Dempster [3] puis a été formalisée par G. Shafer [9]. Cette théorie est à l'heure actuelle employée dans des domaines divers : fusion multicapteur, reconnaissance des formes, fusion de classifieurs. De plus, elle est considérée comme un cadre fédérateur des mesures de confiance. Tandis que les fonctions de croyance sont malheureusement peu utilisées dans le domaine du traitement et de l'analyse d'images [2, 11, 8], les applications des différentes théories de l'imprécis et de l'incertain (probabilités, possibilités et sous-ensembles flous) sont nombreuses [1].

Ce papier présente quelques applications de la théorie des fonctions de croyance en traitements d'images. Dans un premier temps, les concepts de base sous-jacents à la théorie sont présentés (section 2). Nous nous intéressons ensuite au problème classique de la segmentation d'images et au cas particulier des images couleur. Le problème peut être vu sous la forme d'un problème de classification. Dans la section 3, un algorithme de classification évidentielle, qui s'appuie sur le principe de stabilisation d'une partition d'un ensemble de données vis-à-vis d'une règle de décision, est présenté. La règle choisie est l'extension des k plus

proches voisins aux fonctions de croyance proposée par T. Denœux dans [4]. Dans la section 4, un filtre de convolution crédale, qui peut être utilisé pour différentes opérations de traitement d'images, est proposé. Nous verrons comment ce filtre peut être employé dans le domaine du traitement d'images. Quelques résultats de segmentation sur des images synthétiques et naturelles sont enfin présentés dans la section 5.

2 Concepts de base

Dans cette section, nous rappelons brièvement quelques concepts de base de la théorie des fonctions de croyance ainsi que la définition d'une partition crédale. Le point de vue du modèle des croyances transférables [10] est adopté dans cet article. Celui-ci distingue deux niveaux de traitement de l'information : le niveau crédal où les croyances sont manipulées et le niveau pignistique utilisé lors du processus de prise de décision. La définition d'une partition crédale d'un ensemble de données vient conclure cette section.

2.1 Niveau crédal

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_K\}$ un ensemble fini, généralement appelé cadre de discernement. Une fonction de croyance *bel* est une mesure floue non additive de 2^Ω dans $[0, 1]$ définie par :

$$bel(A) \triangleq \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B) \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (1)$$

où m , appelé généralement jeu de masses, est une fonction de 2^Ω dans $[0, 1]$ qui vérifie :

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

Chaque sous-ensemble $A \subseteq \Omega$ tel que $m(A) > 0$ est appelé élément focal de m . Ainsi, la masse $m(A)$ représente le degré de croyance attribué à la proposition A et qui n'a pas pu, compte tenu de l'état de la connaissance, être affectée à un sous-ensemble plus spécifique que A . Un jeu de

masse m tel que $m(\emptyset) = 0$ est appelé normal. Cette condition a été initialement imposée par Shafer [9] mais peut être relaxée si l'on accepte l'hypothèse du monde ouvert qui postule pour la non-exhaustivité du cadre de discernement Ω . Tirés des travaux de Shafer [9], les fonctions de croyance sont de nos jours reconnues pour la modélisation des informations incertaines (de l'ignorance totale à la connaissance complète). Ainsi, une situation d'ignorance complète correspond à la fonction de croyance vide définie par $m(\Omega) = 1$. La connaissance parfaite sera représentée par une fonction de croyance certaine c'est-à-dire une fonction où la totalité de la masse est allouée à un singleton unique de Ω . Un autre cas particulier peut être rencontré lorsque les éléments focaux de m sont des singletons. Dans ce cas, la fonction de croyance est équivalente à une fonction de probabilité et sera appelée fonction de croyance bayésienne. Parmi les outils définis dans les travaux initiaux de Shafer, il en est un qui concerne la combinaison de deux fonctions de croyance. A partir des fonctions de masse m_1 et m_2 , la combinaison conjonctive de ces deux sources d'information ($m_\cap = m_1 \cap m_2$) peut être calculée $\forall A \subseteq \Omega$ par :

$$m_\cap(A) \triangleq \sum_{A=B \cap C} m_1(B)m_2(C). \quad (2)$$

Il est à noter que cette règle, généralement appelée règle de Dempster non normalisée, permet de combiner des informations incertaines extraites sous forme de fonctions de croyance. Si nécessaire, la condition $m(\emptyset) = 0$ peut être retrouvée en divisant chaque masse par un coefficient de normalisation. L'opération résultante, appelée règle de Dempster et notée \oplus est définie $\forall A \subseteq \Omega$ par :

$$(m_1 \oplus m_2)(A) \triangleq \frac{(m_1 \cap m_2)(A)}{1 - m(\emptyset)} \quad (3)$$

où la quantité $m(\emptyset)$ est appelée degré de conflit entre les fonctions m_1 et m_2 et peut être calculé en utilisant l'équation suivante :

$$(m_1 \cap m_2)(\emptyset) = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C). \quad (4)$$

L'utilisation de la règle de Dempster est possible si et seulement si m_1 et m_2 ne sont pas en conflit total, c'est-à-dire s'il existe deux éléments focaux B et C de m_1 et m_2 qui satisfassent $B \cap C \neq \emptyset$. Cette règle possède cependant des propriétés intéressantes comme l'associativité, la commutativité et la non-idempotence mais a été très discutée [7].

2.2 Niveau pignistique

L'étape d'agrégation précédemment définie permet ainsi d'obtenir un résumé exhaustif de l'information sous forme d'une fonction de croyance unique m qui est utilisée pour la prise de décision. En basant son raisonnement sur des arguments de rationalité développés dans le modèle des croyances transférables, Smets [10] propose de transformer m en une fonction de probabilité P_{Bet} définie sur Ω (appelée fonction de probabilité *pignistique*) qui se formalise pour tout $\omega_k \in \Omega$ par :

$$P_{Bet}(\omega_k) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} \sum_{A \ni \omega_k} \frac{m(A)}{|A|} \quad (5)$$

où $|A|$ représente la cardinalité de $A \subseteq \Omega$. Dans cette transformation, la masse de croyance $m(A)$ est uniformément distribuée parmi les éléments de A . A partir de cette distribution de probabilité, il est alors possible d'utiliser les outils classiques de la théorie de la décision statistique pour la prise de décision.

2.3 Partition crédale

Nous ajoutons aux différentes notions précédemment introduites le concept de partition crédale définie par T. Denœux et M. Masson dans [6]. Soit $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n\}$ un ensemble de données où chaque individu i est représenté par un vecteur caractéristique \mathbf{x}_i dans un espace à p dimensions.

Définition 1 (Partition crédale) Une partition crédale $M_{\mathcal{X}} = \{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n\}$ est définie comme un ensemble de n fonctions de croyance m_i définies sur Ω décrivant la

connaissance sur la classe d'appartenance d'un ensemble \mathcal{X} de données. Plus précisément, la fonction m_i quantifie le degré de croyance assigné au vecteur \mathbf{x}_i concernant un ensemble de clusters définis dans Ω .

Deux cas particuliers de partition sont à considérer :

- si chacune des fonctions de croyance m_i est une fonction de croyance certaine sur Ω , la partition crédale obtenue est une partition classique de \mathcal{X} sur Ω et correspond à une situation de connaissance complète ;
- si chacune des fonctions de croyance m_i est une fonction de croyance bayésienne, la partition obtenue est une partition floue de \mathcal{X} sur Ω comme définie par J.C. Bezdek [1].

Enfin, on définit une K -partition crédale comme une partition de \mathcal{X} sur Ω tel que $|\Omega| = K$.

3 Classification évidentielle

3.1 Méthode des distances

Le but de la méthode consiste à rechercher une partition stable vis-à-vis d'une règle de décision \mathcal{R} . La règle de décision utilisée est une extension aux fonctions de croyance de l'algorithme des plus proches voisins et a été introduite par T. Denœux [4]. Cet algorithme consiste à construire à partir d'un ensemble d'apprentissage $\mathcal{L} = \{(\mathbf{x}_i, \omega_i), i = 1, \dots, n\}$ une fonction \mathcal{R} par la méthode classique des k plus proches voisins. Dans sa version initiale, chaque voisin de \mathbf{x} dans \mathcal{L} est considéré comme une source d'information quantifiant le degré de croyance sur l'appartenance du vecteur \mathbf{x} à une classe dans Ω . Ainsi, une fonction de croyance m_i est directement construite en utilisant les informations apportées par les vecteurs \mathbf{x}_i situés dans le voisinage du vecteur inconnu \mathbf{x} par :

$$m_i(\{\omega_k\}) = \xi \phi(d_i) \quad (6)$$

$$m_i(\Omega) = 1 - \xi \phi(d_i) \quad (7)$$

où d_i est la distance Euclidienne au vecteur \mathbf{x}_i et ξ un paramètre. La masse de croyance

allouée au singleton $\{\omega_k\}$ est donc un affaiblissement de la distance entre \mathbf{x} et \mathbf{x}_i . Dans ces équations, la fonction ϕ prend la forme $\phi(d_i) = \exp[-\gamma(d_i)^2]$ avec γ un paramètre positif. Les fonctions de croyance obtenues pour chaque voisin sont ensuite fusionnées sous la forme d'une fonction de croyance m^Ω définie sur Ω par la règle de combinaison de Dempster [9]. Cette fonction peut être calculée par $m = \bigoplus_{\mathbf{x}_i \in \Phi(\mathbf{x})} m_i$ où $\Phi(\mathbf{x})$ représente le voisinage du vecteur \mathbf{x} . Il s'agit donc de fusionner tous les vecteurs \mathbf{x}_i situés au voisinage de \mathbf{x} selon une certaine métrique. Enfin, la décision quant à l'étiquetage du vecteur \mathbf{x} est prise en analysant la fonction de probabilité pignistique [10] déduite à partir de m par l'équation (5). Cette règle de décision a été validée sur de nombreux jeux de données et ses performances sont plus qu'honorables si on s'attache toutefois à optimiser les différents paramètres. Ceux-ci peuvent être déterminés par une méthode du style descente du gradient pour minimiser un critère d'erreur. Le nombre de voisins k quant à lui peut être déduit par une méthode de validation croisée.

3.2 Algorithme proposé

La règle de discrimination \mathcal{R} ainsi construite permet d'introduire un algorithme itératif qui consiste à construire une suite de partition crédale de \mathcal{X} étant donné un nombre de classes [5]. A partir d'une partition aléatoire initiale, chaque vecteur à classer est tiré aléatoirement dans \mathcal{X} et est ensuite classé par la règle de décision \mathcal{R} . L'itération se termine lorsqu'une partition stable est obtenue c'est-à-dire lorsque l'on n'observe aucun changement dans l'attribution des labels. Le nombre de classes K à l'itération initiale est fixé par le nombre d'individus dans \mathcal{X} , ce qui permet d'obtenir un algorithme non paramétrique. Dans les itérations suivantes, le nombre de classes est réduit naturellement par l'attribution des vecteurs à une classe dans Ω . Ainsi l'algorithme obtenu peut être déroulé de la manière suivante :

-
- Tirage d'une partition $M_{\mathcal{X}}$ initiale
 - repeat {
 - ★ Tirage d'un ordre aléatoire dans \mathcal{X}
 - ★ Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ dans l'ordre
 - ◇ Calcul des fonctions m_i
 - ◇ Calcul de m par fusion des m_i
 - ◇ Calcul de P_{Bet} à partir de m
 - ◇ Attribution du label par \mathcal{R}
 - ★ Analyse de la partition crédale
 - ★ Réduction du nombre de classes K
 - } until (Partition Stable)
 - Analyse de la partition $M_{\mathcal{X}}$ finale
-

La partition finale obtenue est une partition crédale c'est-à-dire que chaque individu est caractérisé par une fonction de croyance qui quantifie le degré d'appartenance. Il est à noter que le problème du conflit qui peut apparaître lors de la combinaison des fonctions de croyance devient crucial et qu'il doit être résolu avec un opérateur adéquat [7]. Dans notre cas, nous avons opté pour l'utilisation d'un opérateur purement conjonctif.

3.3 Simulations

De façon à illustrer l'algorithme, nous présentons un test sur des données générées artificiellement à partir de distributions gaussiennes dans un espace de dimension 3. La figure 1 présente les résultats de classification sur ces données simulées. La classification obtenue par l'algorithme proposé permet de classer ces données sans aucune erreur.

4 Filtre de convolution crédale

Dans le domaine du traitement d'images, la convolution prend une place importante parmi les opérateurs rencontrés. Elle permet en outre de résoudre certains problèmes de filtrage ou de détection. Le principe consiste à balayer l'image et à multiplier pour chaque pixel les valeurs du voisinage par les coefficients du filtre. Suivant les valeurs attribués aux coefficients du

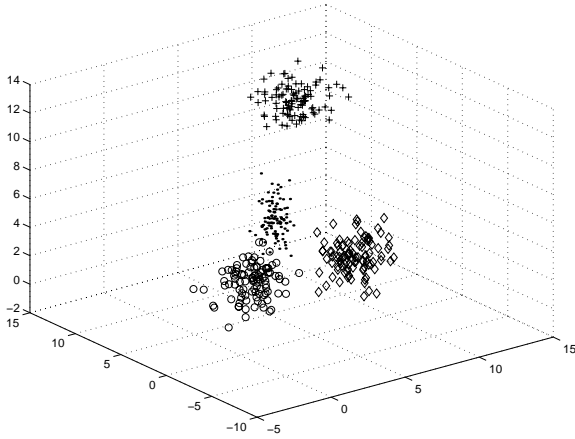


Figure 1 – Base de données synthétiques : Résultat de la classification évidentielle.

filtre, l'image convoluée peut être représentative des contours (filtre gradient) ou tout simplement filtrée (moyenneur, médian, ...). L'idée proposée dans de papier est de construire un filtre de convolution crédale c'est-à-dire un filtre permettant de prendre en compte les imperfections associées aux pixels de l'image grâce à la théorie des fonctions de croyance.

4.1 Principe

Pour la prise de décision quant au pixel P , on suppose que l'on souhaite combiner n fonctions de croyance m_i . Chacune de ces fonctions m_i est relative à un pixel P_i du voisinage de P et définie sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_K\}$. Ce cadre de discernement est obtenu en examinant le nombre de couleurs différentes dans le voisinage de P . A chaque sous-ensemble ω_k de Ω correspond une couleur C_k . La fonction de croyance m_i relative au pixel P_i de couleur C_k peut alors être définie sur Ω par :

$$m_i(\{\omega_k\}) = \alpha \quad (8)$$

$$m_i(\Omega) = 1 - \alpha \quad (9)$$

avec $0 < \alpha < 1$ un paramètre. Par la prise en compte du voisinage et par combinaison conjonctive des fonctions de croyance m_i , on obtient une fonction de croyance $m = \bigcap_i^n m_i$. Puisque chacune des fonctions m_i ne possède que deux éléments focaux (le singleton ω_k et Ω),

il est facile de calculer la fonction de croyance m qui s'obtient¹ par :

$$m(\{\omega_k\}) = (1 - \alpha)^{n-n_k} - (1 - \alpha)^n$$

$$m(\Omega) = (1 - \alpha)^n$$

où n_k est le nombre de pixels de couleurs C_k dans le voisinage du pixel P considéré.

4.2 Simulations

De manière à évaluer le comportement de notre filtre de convolution crédale, on propose d'effectuer une simulation pour un pixel P dans un voisinage 3×3 . La fonction de croyance m est calculée à partir des équations précédentes pour différentes valeurs de n_1 et n_2 en prenant pour hypothèse qu'il n'existe que deux couleurs dans le voisinage du pixel P . La figure 2 présente les jeux de masse obtenus en fonction du paramètre α et la figure 3 les probabilités pignistiques associées aux deux classes ω_1 et ω_2 . On remarque que la masse attribuée à l'ensemble vide $m(\emptyset)$ est loin d'être négligeable et qu'il est nécessaire d'analyser finement cette répartition du conflit. Pour une valeur du paramètre α fixée, il est pos-

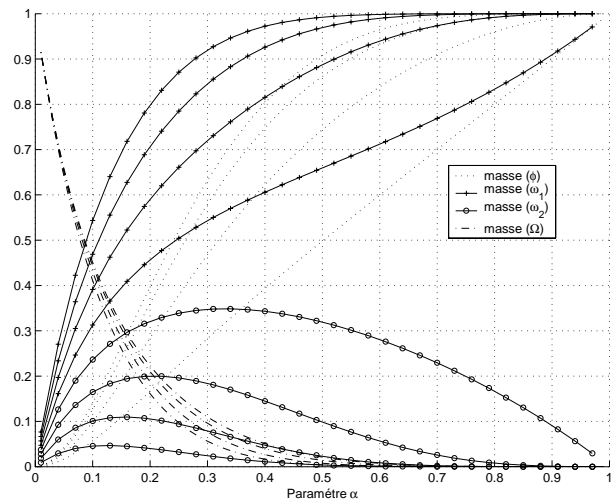


Figure 2 – Jeux de masse pour différentes valeurs de n_1, n_2 dans un voisinage 3×3 .

sible de rejeter la décision en fixant un seuil sur la probabilité pignistique. Ce principe permet

¹Cf. Annexe. Merci à Philippe Smets.

de ne pas prendre de décision dans le cas où la fonction de probabilité pignistique tend vers une distribution uniforme.

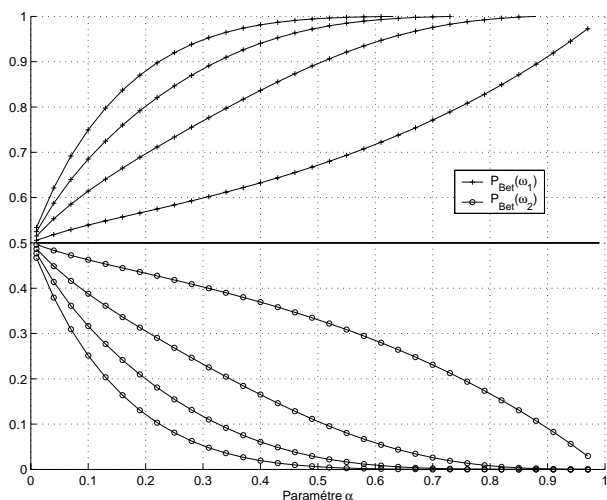


Figure 3 – Probabilités pignistiques pour différentes valeurs de n_1, n_2 dans un voisinage 3×3 .

5 Application à la segmentation d’images

Dans cette section, nous illustrons les méthodes exposées précédemment dans le cadre d’un problème de segmentation d’images couleur. Nous utilisons tout d’abord une image de synthèse composée de cinq régions de formes différentes sur un fond uniforme. L’image est ensuite bruitée par un bruit gaussien additif. La seconde image est une scène naturelle bien connue dans le domaine du traitement d’images couleur. Ces deux images originales sont présentées à la figure 4. Nous avons appliqué l’algorithme de classification présenté à la section 3 sur ces deux images en choisissant le nombre de voisins $k = \sqrt{N}$ où N est le nombre total de pixels de l’image et en fixant le nombre initial de classes $K = N$. Ces résultats sont présentés sur les figures 5 et 6. Sur ces figures, les images de gauche représentent les résultats obtenus par l’algorithme de classification en associant à chaque cluster final la couleur moyenne des pixels composant le cluster. Afin de mieux distinguer les résultats de la segmentation, nous



Figure 4 – Image de synthèse (gauche), Image réelle HOUSE (droite).

associons sur les images de droite une fausse couleur (tirée aléatoirement) à chaque cluster final. Ces résultats conduisent à légèrement sur-segmenter les images originales (8 clusters pour l’image de synthèse et 19 pour l’image réelle). Cette première étape de pré-segmentation peut être suivie par une étape de filtrage de façon à en éliminer les artefacts. De manière à mettre

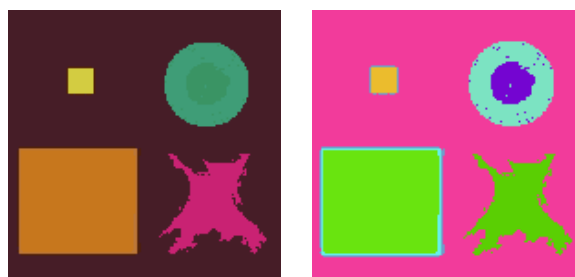


Figure 5 – Résultats de la segmentation évidentielle : Image de synthèse segmentée (gauche) et fausses couleurs (droite).

en évidence l’efficacité du filtre de convolution crédale présenté à la section 4, nous avons appliqué le filtre aux images pré-segmentées. Nous avons choisi une valeur de α égale à 0.9. Ces résultats sont présentés aux figures 7 et 8 tendent à démontrer qu’avec ce réglage, les points isolés peuvent être éliminés conduisant ainsi à améliorer le processus de segmentation. Ces deux étapes combinées (classification + convolution) peuvent ainsi être vues comme une approche de segmentation complémentaire alliant une approche région et une approche contour. En effet, la figure 9 présente la répartition de la masse $m(\emptyset)$ sous la forme

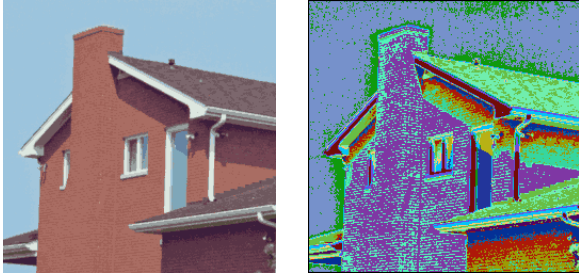


Figure 6 – Résultats de la segmentation évidentielle : Image segmentée HOUSE (gauche) et fausses couleurs (droite).

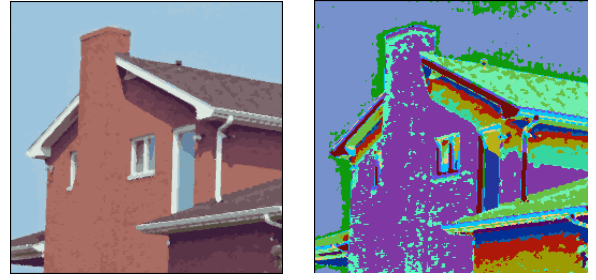


Figure 8 – Résultat du filtrage évidentiel : Image filtrée HOUSE (gauche), Image filtrée HOUSE en fausses couleurs (droite).

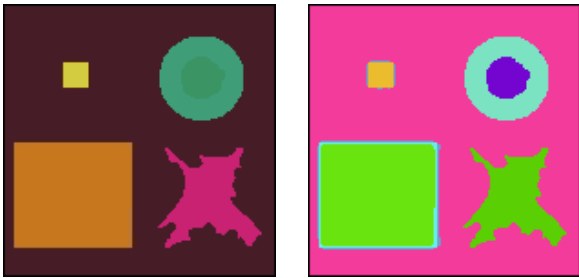


Figure 7 – Résultat du filtrage évidentiel : Image de synthèse filtrée (gauche), Image de synthèse filtrée en fausses couleurs (droite).

d'une image où les niveaux de gris les plus clairs représentent les zones à fort conflit. Sur ces images, on peut s'apercevoir que les zones homogènes sont des zones où la valeur de $m(\emptyset)$ est faible tandis que les zones à fort conflit sont principalement situées sur les contours des régions de l'image.

6 Conclusion

Dans ce papier, la théorie des fonctions de croyance est utilisée dans le domaine du traitement et de l'analyse d'images. Le problème de la segmentation d'images couleur est appréhendé comme un processus en deux étapes : une étape de pré-segmentation suivi d'une étape de filtrage. La pré-segmentation est réalisée à partir d'un algorithme de classification évidentielle qui permet d'obtenir une partition crédale et donc un degré de croyance qui quantifie l'appartenance de chaque pixel de l'image aux différents clusters. Notre contribution principale ré-

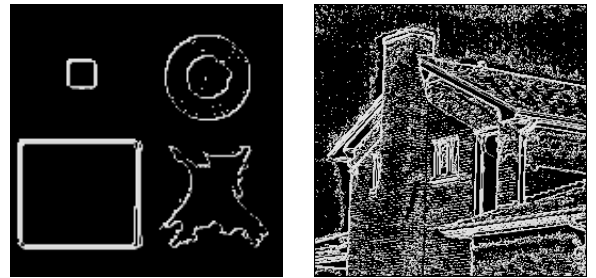


Figure 9 – Répartition du conflit $m(\emptyset)$: Synthèse (gauche), HOUSE (droite).

side dans l'étape de filtrage, qui a été menée en introduisant un filtre de convolution crédale. En ajustant de manière adéquate les coefficients, ce filtre peut être utilisé pour différentes opérations de traitement d'images. Quelques exemples ont montré ses performances pour l'élimination de pixels isolés ou la détection de contours qui sont principalement retrouvés grâce à l'analyse du conflit. Les travaux futurs tendent à définir les coefficients du filtre de convolution crédale à appliquer pour réaliser les opérations classiques de traitement d'images (réduction du bruit, détection de contours, morphologie, ...). Nous cherchons également à améliorer l'algorithme de classification évidentielle en essayant de modifier l'attribution des masses (cf. équations (6) et (7)).

Annexe : Calcul de la fonction m

On peut retrouver les n fonctions de communalité q_i à partir des jeux de masse m_i sachant que $q(A) = \sum_{A \subseteq B} m(B)$ pour tout $A \subseteq \Omega$. Cha-

cune des fonctions q_i prend pour valeur 1 pour l'ensemble vide \emptyset et un des singletons de Ω et $(1 - \alpha)$ pour tous les autres termes. La fonction q résultante de la combinaison conjonctive est le produit des communalités qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} q(\emptyset) &= 1 \\ q(\{\omega_k\}) &= (1 - \alpha)^{n-n_k} \\ q(A) &= (1 - \alpha)^n \quad \forall A \subseteq \Omega \setminus \{\emptyset, \{\omega_k\}\}. \end{aligned}$$

En utilisant la transformée de Möbius inverse ($m(A) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} q(B)$), il est aisé de retrouver le jeu de masses m déduit de q par :

$$\begin{aligned} m(\{\omega_k\}) &= (1 - \alpha)^{n-n_k} - (1 - \alpha)^n \\ m(\Omega) &= (1 - \alpha)^n. \end{aligned}$$

Une autre approche permet de trouver une expression équivalente à ce jeu de masses. Elle peut être décrite de la manière suivante. Chaque fonction de croyance m_i possède deux éléments focaux : un des singletons ω_k et Ω . On suppose que les jeux de masse m_i qui possèdent le même élément focal ω_k sont en nombre n_k . La combinaison conjonctive de ces n jeux de masse va donc faire apparaître une somme de n_k termes non nuls pour la masse attribuée à ω_k . Ensuite, il faut imaginer tous les produits croisés entre les éléments focaux des fonctions m_i telle que leur intersection donne le sous-ensemble ω_k . On suppose que le i ème terme de cette somme aura la forme $\alpha^i (1 - \alpha)^{n-i}$. Il reste à dénombrer le nombre de fois, noté β_{ik} , où ce terme apparaît. Après analyse de tous les produits croisés possibles, cette valeur peut être calculée par :

$$\beta_{ik} = \frac{n_k!}{i!(n_k - i)!}.$$

La masse résultante $m(\{\omega_k\})$ peut donc être calculée à partir de :

$$m(\{\omega_k\}) = \sum_{i=1}^{n_k} \beta_{ik} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i}.$$

En ce qui concerne la masse attribuée à Ω , elle correspond tout simplement au produit des n masses affectées par chacune des fonctions m_i à Ω , on aura donc :

$$m(\Omega) = (1 - \alpha)^n.$$

Références

- [1] J.C. Bezdek, J. Keller, R. Krishnapuram, and N.R. Pal. *Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing*. Kluwer Academic, 1999.
- [2] I. Bloch. Some aspects of Dempster-Shafer evidence theory for classification of multi-modality medical images taking partial volume effect into account. *Pattern Recognition Letters*, 17 :905–919, 1996.
- [3] A. Dempster. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping. *AMS*, 38 :325–339, 1967.
- [4] T. Denœux. A k-nearest neighbour classification rule based on Dempster-Shafer theory. *IEEE Transactions on SMC*, 25(5) :804–813, 1995.
- [5] T. Denœux and G. Govaert. Combined supervised and unsupervised learning for system diagnosis using Dempster-Shafer theory. In *CESA'96 IMACS Multiconference*, pages 104–109, 1996.
- [6] T. Denœux and M. Masson. Clustering of proximity data using belief functions. In *Proceedings of IPMU'2002*, volume I, pages 609–616, Annecy, France, 2002.
- [7] E. Lefevre, O. Colot, and P. Vannoorenberghe. Belief functions combination and conflict management. *Information Fusion*, 3(2) :149–162, June 2002.
- [8] M. Rombaut and Y. M. Zhu. Study of Dempster-Shafer theory for image segmentation applications. *Image and Vision Computing*, 20 :15–23, 2002.
- [9] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [10] P. Smets and R. Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66(2) :191–234, 1994.
- [11] A. Verikas, K. Malmqvist, and M. Baucuskienne. Combining Neural Networks, Fuzzy Sets and Evidence Theory based approaches for analysing images. In *International Joint Conference on Neural Networks*, pages 297–302, 2000.