Un modèle à base de contraintes en fonction de croyance pour le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps

Tekwa Tedjini, Sohaib Afifi, Frédéric Pichon, Eric Lefèvre

Univ. Artois, EA 3926, Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A), F-62400 Béthune, France

tekwa_tedjini@ens.univ-artois.fr

{sohaib.afifi, frederic.pichon, eric.lefevre}@univ-artois.fr

Mots-clés : *tournées de véhicules, temps incertains, fonctions de croyance.*

1 Problématique et motivation

Nous étudions le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps VRPTW (vehicle routing problem with time windows)[2] où l'on sert, à moindres coûts, un ensemble de clients par une flotte de véhicules basée dans un dépôt. Chaque client i a une demande à satisfaire, une durée de service et une fenêtre de temps $[e_i,l_i]$ indiquant sa disponibilité. Tout chemin entre i et j est muni d'une distance (ou un coût) et d'un temps de trajet. Si un véhicule arrive chez le client i avant e_i, il doit attendre jusqu'à l'ouverture de sa fenêtre de temps. Par ailleurs, toute arrivée après l_i est interdite. Les véhicules doivent retourner au dépôt avant sa fermeture et leurs capacités doivent être respectées.

Deux modélisations du VRPTW sont utilisées en fonction des informations disponibles au moment de la planification et des objectifs du décideur : le modèle stochastique (SVRPTW) et le modèle robuste (RVRPTW). Le SVRPTW propose une solution où les temps de service et de trajets sont aléatoires et représentés par des lois de probabilités connues ou estimées. Une des techniques utilisées en programmation stochastique est la programmation par contraintes de chance CCP (Chance-Constrained Programming) où la probabilité que "*le service d'un client i commence au plus tard à* l_i" doit être supérieure à un niveau de confiance $\alpha \in [0,1]$ ($P(\textit{début de service}_i \leq l_i) \geq \alpha$). Par ailleurs, dans le RVRPTW, les temps de service et de trajets sont imprécis et appartiennent à un ensemble d'incertitude bien défini. Le modèle fournit une solution qui résiste au pire cas mais qui tend souvent a être trop conservative.

Plus récemment, de nouveaux cadres de modélisation de l'incertitude ont emmergé et celui de la théorie des fonctions de croyance en est un [4]. Cette théorie apporte des résulats similaires qu'en théorie des probabilités si les informations en entrée sont les mêmes, mais son point fort est qu'elle généralise les deux approches : probabiliste et ensembliste en offrant une modélisation plus fidèle des connaissances imparfaites (aléatoires, imprécises, incomplètes, ...).

2 Approche proposée

Nous proposons d'utiliser la théorie des fonctions de croyance pour représenter l'incertitude sur les temps de service et les temps de trajet. Dans ce cadre, on associe des parts de croyance (masses) à la connaissance que l'on a sur une variable x. Formellement, ceci revient à définir une fonction de masse $m : 2^\Omega \to [0,1]$ où Ω est l'ensemble contenant toutes les réalisations possibles de x. Par exemple : $m(x \in [10,15]) = 0.4$, $m(x \in [15,30]) = 0.6$. L'expression $m(x \in [10,15]) = 0.4$ représente la part de croyance allouée à $x \in [15,10]$ et rien de plus spécifique. À partir de m, il est possible de définir, pour tout $A \in \Omega$, une fonction de croyance $Bel(x \in A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m^\Omega(B)$ et une fonction de plausibilité $Pl(x \in A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m^\Omega(B)$. Bel (resp. Pl) signifie la part de croyance allouée (resp. qui pourrait être allouée) à $x \in A$.

En s'inspirant des travaux dans [1], nous remplaçons la contrainte de chance dans le modèle CCP par deux contraintes $Bel(\textit{début de service}_i \leq l_i) \geq \overline{\alpha}$ et $Pl(\textit{début de service}_i \leq l_i) \geq \underline{\alpha}$, avec $\overline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}$ $(0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} \leq 1)$ deux niveaux de confiance fixés par le décideur. Ces deux contraintes constituent un encadrement de la contrainte probabiliste du modèle CCP ($Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$) offrant ainsi une modélisation plus générale du problème.

3 Méthode de résolution

Le VRPTW est un problème NP-difficile, l'ajout de l'incertitude résulte en un modèle encore plus complexe, de ce fait, nous avons recours à une méthode approchée. Nous avons utilisé un algorithme mémétique MA qui est une méta-heuristique évolutionnaire dont la caractéristique principale est l'utilisation des procédures de recherche locale. Ces procédures améliorent les individus de la population courante à travers l'exploration de leurs voisinages. Notre algorithme utilise une représentation indirecte d'une solution, dite tournée géante, pour réduire l'espace de recherche. Toute tournée géante subit une procédure de découpage afin d'en extraire un ensemble de tournées de coûts minimums respectant toutes les contraintes du problème. Cette procédure est une adaptation de la méthode Split, introduite initialement dans [3] pour le VRP avec capacité. L'adaptation incorpore les fenêtres de temps en vérifiant, pour chaque client ainsi que pour le dépôt, si les valeurs de croyance et de plausibilité respectent les contraintes liées à $\overline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}$. Étant donné que le temps de début de service de chaque client dépend de celui de son prédécesseur sur la route, nous avons utilisé des formules spécifiques pour combiner les fonctions de masse des temps incertains. Le découpage d'une solution se fait en $O(n^2 \times c^2)$ où n est le nombre de clients et c est le nombre maximum d'intervalles dans les fonctions de masse.
L'étape de recherche locale utilise une procédure itérative de construction/destruction visant à améliorer la solution en cours. Une portion des clients est supprimée de la solution puis les différentes insertions possibles pour chacun d'entre eux sont évaluées. L'insertion engendrant un meilleur coût est retenue et le processus est réitéré jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de clients à insérer.

4 Résultats et conclusion

Afin de valider le MA, nous avons effectué des tests préliminaires sur une adaptation des instances de Solomon. Toutes les données déterministes ont été préservées à l'exception des temps de service et des temps de trajet que nous avons transformé en fonctions de masse. La solution que nous proposons est générale, car en fonction du choix de $\underline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}$ on peut couvrir des cas biens connus en littérature, notamment l'approche stochastique ($\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$) et robuste si les fonctions de masse des temps de service et de trajet sont catégoriques (imprécises) i.e : $m(x \in [a, b]) = 1$).

Références

[1] N. Helal, F. Pichon, D. Porumbel, D. Mercier, and E. Lefevre. The capacitated vehicle routing problem with evidential demands. *Int. J. Approx Reason.*, 95 :124–151, 2018.

[2] B. Kallehauge, J. Larsen, O.B. Madsen, and M.M. Solomon. Vehicle routing problem with time windows. In G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M.M. Solomon, editors, *Column Generation*, pages 67–98. Springer, Boston, MA, 2005.

[3] C. Prins. A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Comput Oper Res*, 31(12) :1985–2002, 2004.

[4] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press*, 1976.