Problème du plus court chemin avec poids évidentiels

Tuan-Anh Vu[1], Sohaib Afifi[1], Éric Lefèvre[1], Frédéric Pichon[1]
Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)
F-62400 Bethune, France
{tanh.vu, prénom.nom}@univ-artois.fr

Mots-clés : *Problème du plus court chemin, fonction de croyance, méthodes exactes.*

1 Introduction

Nous étudions le problème du plus court chemin d'une source unique à une destination unique dans un graphe $G = (V, A, c)$ où l'information sur les poids des arcs c est incertaine. De nombreuses approches ont été proposées pour modéliser cette incertitude. En particulier, le cadre de l'optimisation robuste où l'incertitude est représentée par des ensembles de scénarios discrets [?, ?] ou par des intervalles [?, ?].

Dans ce travail, nous étudions le cas où l'incertitude sur les poids des arcs c_{ij} est *evidentielle*, c'est-à-dire modélisée par une fonction de croyance [?]. Plus précisément, nous supposons que chaque élément focal de la fonction de croyance considérée est un produit cartésien d'intervalles $F = \times_{(i,j)\in A}[l_{ij}, u_{ij}]$ où chaque intervalle décrit les valeurs possibles du poids d'un arc.

Cette fonction de croyance peut être illustrée comme suit : dans un réseau comportant trois villes A, B et C, si les conditions météorologiques sont bonnes, il faut 20 à 30 minutes pour aller de A à B, et 10 à 20 minutes pour aller de B à C ; cependant, en cas de mauvais temps, le trajet de A à B (resp. de B à C) prend 30 à 40 minutes (resp. 15 à 25 minutes) et les prévisions nous indiquent que la probabilité de beau temps (resp. de mauvais temps) est 0.8 (resp. 0.2).

En présence d'une incertitude évidentielle sur les poids des arcs, la notion de meilleur chemin, c'est-à-dire de chemin le plus court, devient mal définie. De façon similaire à celle de [?] et en utilisant la théorie de la décision sous incertitude évidentielle [?], les meilleurs chemins sont définis, dans ce travail, comme étant ceux qui ne sont pas dominés par rapport à une *relation de préférence*.

2 Résolution

Contrairement à [?, ?], nous proposons des méthodes *exactes* pour trouver un ensemble de solutions non dominées (*Opt*), en raison du fait que le SPP est beaucoup plus simple que le VRP. De plus, bien que Guillaume *et al.* [?] aient montré qu'en général il est impossible, dans un temps raisonnable, de trouver les meilleures solutions, nos résultats indiquent que cela peut néanmoins être fait lorsque les éléments focaux sont d'un type particulier.

L'ensemble des solutions non dominées *Opt* à partir de l'ensemble total de solutions $\mathcal{Q}$ est défini par :

$$Opt = \{f \in \mathcal{Q} : \nexists g \text{ tel que } g \prec f\}. \tag{1}$$

$\prec$ est appelée une relation de préférence. Nous considérons en particulier trois critères classiques, appelés **Hurwicz généralisé**, **dominance forte** et **dominance faible**. Le premier induit une relation de préférence complète tandis que les deux derniers induisent des relations partielles conduisant, comme nous le verrons, à des problèmes d'optimisation plus difficiles.

Ces critères reposant sur les notions de poids espérés supérieurs $\overline{E}(p) = \sum_{(i,j)\in A} \bar{u}_{ij} p_{ij}$ et des poids espérés inférieurs $\underline{E}(p) = \sum_{(i,j)\in A} \bar{l}_{ij} p_{ij}$ [?], sont définis comme suit :

1. Critère de Hurwicz généralisé : $f \preceq_{hu} g$ si

$$\alpha\overline{E}(f) + (1-\alpha)\underline{E}(f) \leq \alpha\overline{E}(g) + (1-\alpha)\underline{E}(g) \tag{2}$$

   $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre fixe

2. Critère de dominance forte : $f \preceq_{str} g$ si

$$\overline{E}(f) \leq \underline{E}(g). \tag{3}$$

3. Critère de dominance faible : $f \preceq_{weak} g$ si

$$\overline{E}(f) \leq \overline{E}(g) \text{ et } \underline{E}(f) \leq \underline{E}(g). \tag{4}$$

Nous avons montré dans ce travail que si les éléments focaux de la fonction de masse sont des produits cartésiens d'intervalles, ces ensembles peuvent être trouvés en appliquant des algorithmes développés pour des variantes du SPP déterministe.

— **Proposition 1** *Résoudre le problème SPP selon le critère de Hurwicz généralisé revient à résoudre le SPP dans le graphe $G = (V, A, h)$ avec les poids des arcs $h_{ij} = \alpha\bar{u}_{ij} + (1-\alpha)\bar{l}_{ij}$.*

— **Proposition 2** *Trouver tous les éléments dans Opt_{str} revient à trouver tous les chemins, dans le graphe $G = (V, A, \bar{l})$, dont les poids sont inférieurs ou égaux au plus petit poids d'un chemin s-t dans le graphe $G = (V, A, \bar{u})$.*

— **Proposition 3** *Trouver tous les éléments de Opt_{weak} revient à trouver toutes les solutions efficaces d'un SPP bi-objectif dans le graphe G où chaque arc $(i, j) \in A$ a deux attributs $\bar{u}_{ij}$ et $\bar{l}_{ij}$.*