

Informations et combinaison : les liaisons conflictuelles

Information and combination : the conflicting relationships

E. Lefevre¹, O. Colot¹, P. Vannoorenberghe² et D. de Brucq¹

¹ Laboratoire Perception Systèmes Information (PSI), UPRES EA 2120

Université/INSA de Rouen

Place Emile Blondel, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex

Tél : +33.(0)2.35.52.84.05, Fax : +33.(0)2.35.52.84.83

² Laboratoire Heudiasyc, UMR CNRS 6599

Université de Technologie de Compiègne

BP 20529, 60205 Compiègne Cedex

Tél : +33.(0)3.44.23.49.53, Fax : +33.(0)3.44.23.44.77

e-mail : Eric.Lefevre@insa-rouen.fr

Olivier.Colot@insa-rouen.fr

Patrick.Vannoorenberghe@hds.utc.fr

Denis.Debrucq@univ-rouen.fr

Résumé et mots clef

Dans le cadre de la théorie de l'évidence ou théorie de Dempster-Shafer, la fusion de données est basée sur la construction d'une masse de croyance unique résultant de la combinaison de plusieurs fonctions de masse issues de sources d'information distinctes. Cette combinaison, appelée règle de combinaison de Dempster, ou somme orthogonale, possède différentes propriétés mathématiques intéressantes telle que la commutativité ou l'associativité. Cependant, cette combinaison, à cause de l'étape de normalisation, gère mal le conflit existant entre différentes sources d'information. La gestion du conflit n'est pas mineure, particulièrement lorsqu'il s'agit de fusionner de nombreuses sources d'information. En effet, le conflit a tendance à croître avec le nombre de sources d'information à fusionner. C'est pourquoi une stratégie de redistribution de ce conflit est indispensable. L'idée de cet article est de définir un formalisme permettant de décrire une famille d'opérateurs de combinaison. Pour cela, nous proposons un cadre générique afin d'unifier plusieurs opérateurs. Nous présentons, au sein de ce cadre de travail, les opérateurs de combinaison classiques utilisés dans le cadre de la théorie de l'évidence. Nous proposons ensuite d'autres opérateurs permettant une redistribution moins arbitraire de la masse conflictuelle sur les propositions. Ces opérateurs seront testés et comparés aux opérateurs classiques sur des fonctions de croyance synthétiques et des données réelles.

Fusion d'informations, Théorie de Dempster-Shafer, Règles de combinaison, Conflit.

Abstract and keywords

Within the framework of the Dempster-Shafer theory of evidence, data fusion is based on the building of single belief mass by combination of several mass functions resulting from distinct information sources. This combination, called Dempster's rule of combination, or orthogonal sum, has several interesting mathematical properties, like commutativity or associativity. Unfortunately, it badly manages the existing conflict between the various information sources at the normalization step. The management of conflict is a major issue, especially during the fusion of many information sources. Indeed, the conflict increases with the number of information sources. That is why a strategy of conflict redistribution is essential. In this paper, we define a formalism to describe a family of combination operators. We propose to develop a generic framework in order to unify several operators. We introduce, within this generic framework, traditional combination operators used within the evidence theory. We propose other operators allowing a less arbitrary redistribution of the conflicting mass on the propositions. These various combinations operators were tested on sets of synthetic belief masses and real data.

Data Fusion, Dempster-Shafer Theory of Evidence, Combination Rules, Conflict.

1 Introduction

La fusion d'informations a depuis peu suscité un intérêt certain dans la communauté scientifique [1, 2, 3, 4]. Elle s'appuie généralement sur la théorie des mesures de confiance (qui inclut les mesures possibilistes, crédibilistes, probabilistes et floues) et possède de nombreux avantages :

- utiliser la redondance des informations,
- utiliser la complémentarité des informations disponibles,
- accéder à une information plus fiable,
- améliorer la prise de décision.

La fusion de données est utilisée dans de nombreux domaines tels que la fusion multi-capteur [5] et le traitement d'image [6, 7]. De par ce formalisme, la fusion d'informations permet, de plus, la prise en compte d'informations hétérogènes (numériques ou symboliques) bien souvent imparfaites (imprécises, incertaines et incomplètes) modélisées sous forme de sources qu'il s'agit de combiner, agréger, fusionner. Dans le cadre de la théorie de l'évidence, la fusion d'informations repose sur l'utilisation d'un opérateur permettant de combiner les fonctions de croyance pour les différentes propositions, ou hypothèses en compétition. L'opérateur de fusion de base dans la théorie de l'évidence est l'opérateur de Dempster (somme orthogonale). Lors de la fusion avec cet opérateur, une étape de normalisation est nécessaire afin de préserver les propriétés des jeux de masses. Dans [8], L. Zadeh a montré que cette étape de normalisation conduit à des comportements contre-intuitifs. Afin de remédier à ce problème, R. Yager [9], D. Dubois [10] et Ph. Smets [11] ont proposé de nouveaux opérateurs. Cependant, ces opérateurs ont des comportements plus ou moins satisfaisants. En particulier, les opérateurs de Dubois et Yager ont tendance à répartir la masse conflictuelle (liée à l'inconsistance des sources fusionnées) de manière globale. Smets, quant à lui, soutient que l'existence d'une masse conflictuelle réside dans le fait que le cadre de discernement retenu n'est pas exhaustif. Nous proposons une autre approche. L'idée générale est de répartir de manière pondérée la masse conflictuelle générée sur les propositions non concordantes et éventuellement sur des compositions de ces propositions (hypothèses composites). Les pondérations peuvent être définies à partir des connaissances d'un expert ou à l'aide d'une fonction de coût. Dans cet article, nous nous attacherons donc à définir l'ensemble des propositions sur lesquelles la masse conflictuelle sera répartie ainsi que le poids accordé à chacune de ces propositions. De plus, pour des raisons de clarté, nous définirons un cadre général pour la combinaison de sources d'information en proposant une axiomatique générique permettant de définir une famille d'opérateurs regroupant les différents opérateurs de fusion de la théorie de Dempster-Shafer. Dans cet article, bien que le formalisme soit suffisamment générique pour être appliqué à tout type de problème, nous nous intéressons plus particulièrement à la gestion du conflit dans le cadre d'un problème de reconnaissance de formes en mode supervisé appelé aussi discrimination. Ce problème est souvent présenté de la manière suivante. On considère un ensemble d'individus

répartis en N classes $\{H_1, \dots, H_n, \dots, H_N\}$. Chaque individu est caractérisé par un vecteur forme X composé de variables quantitatives ou qualitatives et d'un vecteur étiquette u indiquant son appartenance à l'une des classes. Ce vecteur est composé d'éléments $u_n^i \in \{0, 1\}$ qui indique l'appartenance du vecteur $X^{(i)}$ à l'hypothèse H_n . Par exemple $u_p^i = 1$ si le vecteur $X^{(i)}$ appartient à la classe H_p , et $u_n^i = 0$ pour tout $n \neq p$. On dispose ainsi d'un ensemble d'apprentissage $\mathcal{X} = \{(X^{(1)}, u^{(1)}), \dots, (X^{(I)}, u^{(I)})\}$ relatif à I individus. Il s'agit alors de définir des règles de classement d'un individu à partir de son vecteur uniquement. Cet article sera organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous abordons les concepts de base de la théorie de l'évidence en insistant sur la combinaison de sources d'information (Section 2). Nous présentons dans la section 3, le cadre générique qui nous permet d'unifier les opérateurs de combinaison classiques qui ont été développés dans le cadre de la théorie de Dempster-Shafer, mais aussi de proposer une famille d'opérateurs adaptatifs. Enfin, des méthodes de détermination des poids à accorder à chacune des propositions impliquées dans le processus de répartition de la masse conflictuelle sont proposées (Section 3.6). Des tests sur des jeux de masses synthétiques et réelles sont présentés dans la section 4 et mettent en évidence l'utilité de ce formalisme.

2 Théorie de Dempster-Shafer

La théorie de l'évidence fut initialement introduite par Dempster [12] lors de ses travaux sur les bornes inférieure et supérieure d'une famille de distributions de probabilités. A partir de ce formalisme mathématique, Shafer [13] a montré l'intérêt des fonctions de croyance pour la modélisation de connaissances incertaines. L'utilité des fonctions de croyance, comme alternative aux probabilités subjectives, a été démontrée plus tard de manière axiomatique par Smets [14, 15] au travers du *Modèle des Croyances Transférables* fournissant ainsi une interprétation claire et cohérente du concept sous-jacent à la théorie.

2.1 Modélisation des connaissances

La théorie de l'évidence suppose au départ la définition d'un ensemble Θ appelé *cadre de discernement*. Cet ensemble est défini de la manière suivante :

$$\Theta = \{H_1, \dots, H_n, \dots, H_N\}. \quad (1)$$

Il est composé de N hypothèses exhaustives et exclusives. On suppose ainsi qu'à chaque vecteur à classer correspond une valeur et une seule dans Θ . Ceci correspond à l'hypothèse du *monde clos (closed-world)*, par opposition à l'hypothèse du *monde ouvert (open-world)* présenté par Smets [11]. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion dans la section 3.2. A partir du cadre de discernement Θ , on en déduit l'ensemble noté 2^Θ , comprenant les 2^N propositions A de Θ :

$$2^\Theta = \{A/A \subseteq \Theta\} = \{\emptyset, \{H_1\}, \{H_2\}, \dots, \{H_1, H_2\}, \dots, \Theta\}. \quad (2)$$

L'une des grandeurs utilisée, dans le cadre de la théorie de l'évidence, est appelée masse de probabilité élémentaire, ou encore *masse de croyance*. Elle présente une grande analogie avec la notion de distribution de probabilité, à la différence que l'on répartit une masse unité parmi les éléments de 2^Θ , c'est-à-dire non seulement sur les hypothèses élémentaires H_n de Θ mais aussi sur les hypothèses composites A . La fonction de masse élémentaire m_j associée à cette source S_j est alors définie par :

$$m_j : 2^\Theta \rightarrow [0, 1] \quad (3)$$

et vérifie les propriétés suivantes :

$$m_j(\emptyset) = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m_j(A) = 1. \quad (5)$$

La masse $m_j(A)$ représente la partie du degré de croyance placée exactement sur la proposition A qui n'a pas pu, compte tenu de l'état de la connaissance, être affectée à un sous-ensemble plus spécifique que A . Cette masse pourra être redistribuée plus précisément aux sous-ensembles de A sous réserve d'apport d'information supplémentaire. Les sous-ensembles A dont la masse est non nulle sont appelés *éléments focaux*. On notera \mathcal{F}_j l'ensemble des éléments focaux associés à une fonction de croyance m_j . La principale difficulté consiste à modéliser les connaissances sur le problème en initialisant de manière adéquate les fonctions de croyance m_j . Cette modélisation dépend généralement de l'application envisagée. Dans [5], Appriou utilise deux modèles pour gérer l'apprentissage incertain dans le cadre de la théorie de l'évidence. Ces modèles sont consistants avec l'approche bayésienne lorsque la masse de croyance est uniquement répartie sur les hypothèses singletons. D'autres modèles, eux aussi fondés sur le calcul de la vraisemblance, ont été proposés [16, 17, 18]. Une autre méthode reposant sur l'utilisation de l'information issue du voisinage a été introduite par Denoeux [19, 20, 21, 22].

2.2 Règle de combinaison de Dempster

Dans le cas de données imparfaites (incertaines, imprécises et incomplètes), la fusion de données est une solution intéressante pour l'obtention d'informations plus pertinentes. La théorie de l'évidence offre des outils appropriés de fusion. A partir des jeux de masses notés m_j obtenus sur chacune des sources d'information S_j , il est possible de mettre en œuvre une règle de combinaison permettant de fournir un jeu de masse combiné m , synthétisant la connaissance des différentes sources. Ce jeu de masses peut alors être utilisé par un module de décision en bénéficiant de toute la connaissance contenue dans les jeux de masses issus de chacune des sources. Historiquement, l'opérateur de Dempster est le premier opérateur de combinaison défini dans le cadre de la théorie de l'évidence. Son utilisation impose de respecter la condition d'indépendance des sources d'information à combiner. L'opérateur de combinaison de Dempster, appelé également somme orthogonale, vérifie les propriétés de commutativité et d'associativité. La masse résultant de la combinaison de J sources d'information S_j est notée

m_{\oplus} , avec :

$$m_{\oplus} = m_1 \oplus \dots \oplus m_j \oplus \dots \oplus m_J \quad (6)$$

où \oplus représente l'opérateur. Dans le cas de deux sources notées S_1 et S_2 , la combinaison s'écrit :

$$m_{\oplus}(A) = \frac{1}{1-K} \cdot m_{\cap}(A) \quad (7)$$

où le terme m_{\cap} correspond à la règle de combinaison conjonctive définie par :

$$m_{\cap}(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) \quad (8)$$

et où K , qui représente la masse affectée à l'ensemble vide, est définie par :

$$K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C). \quad (9)$$

Dans les équations (7) et (9), le coefficient K traduit le conflit existant entre les deux sources S_1 et S_2 . Lorsque ce coefficient est égal à 1, les sources sont en conflit total et ne peuvent être fusionnées. A l'inverse, lorsque K est égal à 0, les sources sont en accord parfait. L'élément neutre de l'opérateur est la masse d'ignorance totale ($m(\Theta) = 1$) et les éléments absorbants sont les fonctions affectant la totalité de la masse de croyance sur l'une des hypothèses élémentaires ($m(\{H_n\}) = 1$). Cette règle de combinaison vérifie certaines propriétés intéressantes et son utilisation a été justifiée de manière théorique par plusieurs auteurs [23, 24, 25]. Toutefois, dans certaines situations, cet opérateur ne peut pas être utilisé. En effet, lorsque :

- la contrainte d'indépendance des sources d'information est violée, la combinaison n'étant pas idempotente, son emploi renforcerait abusivement les propositions soutenues,
- les sources ne sont pas parfaitement fiables et dans le cas où la construction des fonctions de masses est imprécise, un conflit K est engendré. Nous reviendrons en détail sur les origines de ce conflit dans la section 2.4.1. Le facteur de normalisation, qui dépend de ce conflit, rend l'opérateur sensible aux petites imprécisions des jeux de masses, comme l'a montré L. Zadeh [8] et comme nous l'illustrons dans la section suivante.

2.3 Sensibilité de l'opérateur de Dempster

Soit le cadre de discernement $\Theta = \{H_1, H_2, H_3\}$, et deux sources d'information S_1 et S_2 produisant respectivement deux jeux de masses de croyance m_1 et m_2 définis comme suit :

$$\begin{aligned} m_1(\{H_1\}) &= \epsilon & m_2(\{H_1\}) &= 1 - k - \epsilon \\ m_1(\{H_2\}) &= k & m_2(\{H_2\}) &= k \\ m_1(\{H_3\}) &= 1 - k - \epsilon & m_2(\{H_3\}) &= \epsilon \end{aligned} \quad (10)$$

avec $0 \leq k \leq 1$. Dans le cas général, l'application de l'opérateur de Dempster donne le résultat suivant :

$$m_{\oplus}(\{H_1\}) = m_{\oplus}(\{H_3\}) = \frac{\epsilon(1 - k - \epsilon)}{k^2 + 2\epsilon(1 - k - \epsilon)}, \quad (11)$$

et :

$$m_{\oplus}(\{H_2\}) = \frac{k^2}{k^2 + 2\epsilon(1 - k - \epsilon)}. \quad (12)$$

Ainsi, en prenant $k = 0.1$ et $\epsilon = 0.01$, on obtient le jeu de masses suivant :

$$m_{\oplus}(\{H_1\}) = m_{\oplus}(\{H_3\}) = 0.32 \quad m_{\oplus}(\{H_2\}) = 0.36 \quad (13)$$

alors que pour $k = 0.1$ et $\epsilon = 0.001$, on obtient :

$$m_{\oplus}(\{H_1\}) = m_{\oplus}(\{H_3\}) = 0.08 \quad m_{\oplus}(\{H_2\}) = 0.84. \quad (14)$$

Nous constatons, par cet exemple, que la règle de combinaison de Dempster est très sensible aux variations de ϵ . Pour $\epsilon = 0.01$, la masse est répartie de manière équi-crédible sur les 3 hypothèses tandis que pour $\epsilon = 0.001$, la fusion a tendance à soutenir l'hypothèse H_2 . Cette sensibilité est due aux fortes variations du coefficient de normalisation $\frac{1}{1-K}$. La figure FIG. 1, montre les variations de ce coefficient de normalisation en fonction du conflit K . On peut constater qu'au voisinage de $K = 1$, une faible variation de K entraîne une forte variation du coefficient de normalisation.

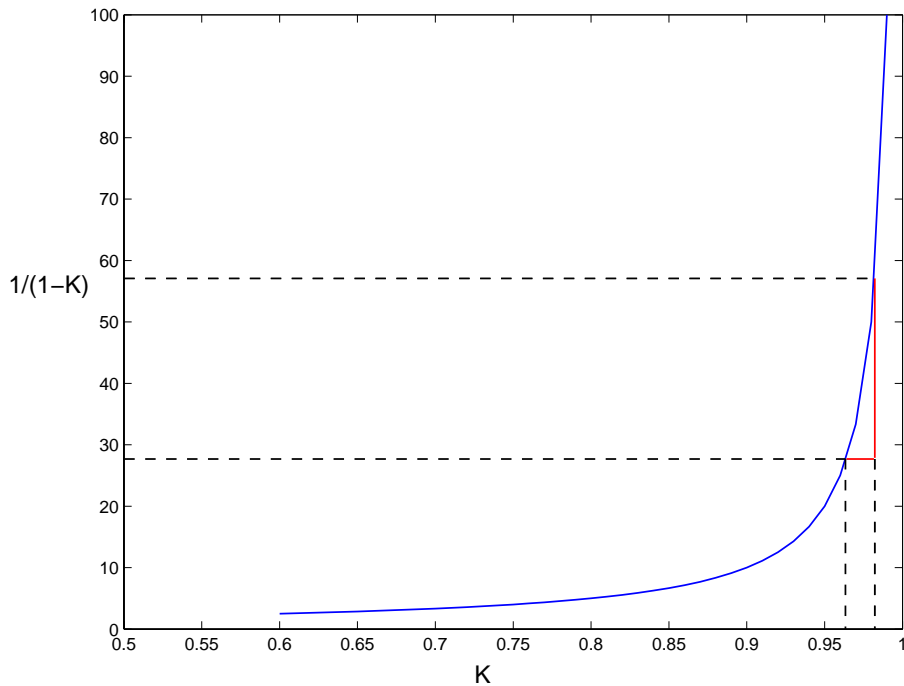


FIG. 1 – Coefficient de normalisation en fonction du conflit.

2.4 Origines et solutions au conflit

Dans cette section, nous présentons les différentes origines du conflit (Section 2.4.1) ainsi que les solutions envisageables pour la répartition de la masse conflictuelle en fonction de son origine (Section 2.4.2).

2.4.1 Origines du conflit

Les causes du conflit peuvent être relativement diverses. Nous pouvons toutefois regrouper ces origines en trois catégories.

La première catégorie regroupe les origines du conflit reposant sur une mesure aberrante issue d'un capteur. En effet, une mesure, située hors du domaine de fonctionnement obtenu lors de l'apprentissage, peut engendrer des conflits lors de la combinaison. Cette mesure aberrante peut être due :

- soit à un mauvais fonctionnement du capteur lors de son acquisition,
- soit à une mauvaise évaluation de la plage de fonctionnement du capteur lors de l'apprentissage. Dans le cas où le capteur fonctionne correctement, cette situation pourrait correspondre à la non prise en compte d'une hypothèse dans le cadre de discernement (classe inconnue).

La seconde catégorie repose sur la modélisation imprécise des fonctions de croyance. En effet, les principaux modèles de détermination des jeux de masses reposent soit sur l'étude d'un voisinage soit sur l'apprentissage de probabilités. Un mauvais choix de distance dans l'approche voisinage ou une mauvaise estimation des vraisemblances dans l'approche apprentissage de probabilités peut engendrer des variations au niveau des fonctions de croyance et ainsi favoriser l'apparition de conflit.

Enfin, lorsque le nombre de sources impliquées dans le processus de fusion est relativement important, un conflit apparaît. Considérons, par exemple, un ensemble de jeux de masses identiques répartissant la croyance de la manière suivante :

$$m(\{H_1\}) = 0.80 \quad m(\{H_2\}) = 0.15 \quad m(\Theta) = 0.05. \quad (15)$$

Prise isolément, chacune des sources soutient de manière importante l'hypothèse H_1 . La figure FIG. 2, qui représente l'évolution du conflit en fonction du nombre de sources impliquées dans la combinaison, montre que lors de la combinaison de 2 sources, 25% de la masse de croyance est conflictuelle et que celle-ci atteint 80% lors de la combinaison de 10 sources.

Ces trois causes, qui interviennent généralement de manière simultanée dans la plupart des applications, soutiennent l'idée d'une redistribution adaptée du conflit.

2.4.2 Solutions au conflit

Plusieurs combinaisons ont été proposées pour résoudre le problème du conflit. Les différentes solutions proposées dans la littérature peuvent être distinguées en deux familles, correspondant à deux philosophies de fusion des informations. La première regroupe des règles de combinaison reposant sur le postulat de fiabilité des sources à fusionner (Section 2.4.2). Cela induit la définition d'opérateurs conjonctifs (Cf. Dempster [12] et Smets [11]). La seconde suppose qu'au moins une des sources est fiable mais en ignorant laquelle (Section 2.4.2). Les opérateurs appartenant à cette famille procèdent en une combinaison conjonctive et disjonctive (Cf. Yager [9] et Dubois [10]).

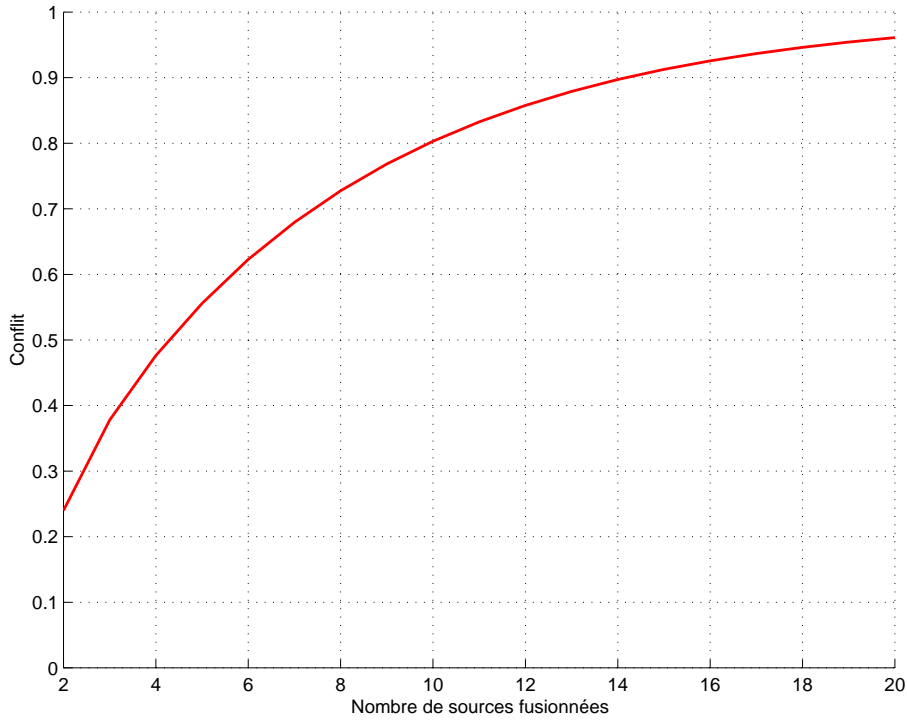


FIG. 2 – Evolution du conflit en fonction du nombre de sources à combiner.

Combinaison de sources fiables : Dans la même idée que pour l’opérateur de Dempster, Smets considère que les sources à fusionner sont fiables. En partant de ce postulat, le conflit ne peut alors provenir que d’un problème mal posé, c’est-à-dire de la non prise en compte d’une ou de plusieurs hypothèses dans le cadre de discernement. Smets préconise alors de ne pas redistribuer la masse conflictuelle K sur l’ensemble des propositions mais uniquement sur l’ensemble vide \emptyset . Ceci afin de constater les problèmes de représentativité du référentiel (non-exhaustif). La combinaison proposée par Smets est alors définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_S(A) = m_{\cap}(A) & \forall A \subseteq \Theta \\ m_S(\emptyset) = K. \end{cases} \quad (16)$$

Notons qu’une approche similaire proposée par Yager [26] repose sur l’introduction d’une nouvelle hypothèse dans le cadre de discernement. Cette hypothèse va supporter toute la masse conflictuelle. En outre, on peut remarquer que les opérateurs supposant que les sources sont fiables reposent principalement sur une combinaison conjonctive.

Combinaison de sources non fiables : Le conflit peut être généré par un défaut de fiabilité d’une partie des sources d’information. Cet argument a été repris dans le cadre des opérateurs présentés par Yager [9] et par Dubois et Prade [10].

Dans le cas de l’opérateur de Yager [9], on suppose que l’une des sources intervenant dans la combinaison est fiable. Ainsi, la solution est obligatoirement dans le référentiel. Mais ne sachant quelle source donne la vraie solution, Yager propose d’attribuer la masse conflictuelle K à l’ensemble Θ . La masse résultante, m_Y , de cette combinaison, pour deux sources

d'information $\{S_1, S_2\}$, est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_Y(A) = m_{\cap}(A) & \forall A \subset \Theta \\ m_Y(\Theta) = m_{\cap}(\Theta) + K. \end{cases} \quad (17)$$

La combinaison proposée par Dubois et Prade [10], dans le cadre de la fusion de deux sources d'information $\{S_1, S_2\}$, peut s'expliquer de la manière suivante. Soit S_1 une source soutenant la proposition B avec une masse de croyance $m_1(B)$ et soit une source S_2 soutenant la proposition C avec une masse de croyance $m_2(C)$. Lorsque les propositions soutenues par ces deux sources sont contradictoires et ne sachant pas quelle source est fiable, le principe de minimum de spécificité impose de redistribuer la masse associée à cette contradiction, soit $m_1(B).m_2(C)$, sur l'union des propositions c'est-à-dire $(B \cup C)$. L'opérateur de Dubois et Prade est alors défini de la manière suivante pour deux sources d'information :

$$m_D(A) = m_{\cap}(A) + \sum_{\substack{B \cup C = A \\ B \cap C = \emptyset}} m_1(B).m_2(C) \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (18)$$

Une autre méthode, reposant sur la définition de coefficients d'affaiblissement, permet de gérer la combinaison de sources non fiables. Soit une fonction de croyance m_j fournie par une source S_j et un coefficient α_j qui représente la degré de confiance que l'on accorde à la source S_j . On obtient alors le formalisme suivant :

- $\alpha_j = 0$ signifie une remise en cause totale de la fiabilité de S_j ,
- $\alpha_j = 1$ signifie une confiance absolue en la source S_j .

On note alors $m_{\alpha_j, j}$ la fonction de croyance m_j affaiblie par un coefficient $(1 - \alpha_j)$. Cette fonction est définie ainsi :

$$\begin{cases} m_{\alpha_j, j}(A) = \alpha_j m_j(A) & \forall A \subset \Theta \\ m_{\alpha_j, j}(\Theta) = 1 - \alpha_j + \alpha_j m_j(\Theta). \end{cases} \quad (19)$$

De cette manière, lorsque nous avons une confiance totale en la fiabilité de la source S_j , l'information apportée par cette source ne devrait pas engendrer de conflit lors de la combinaison. Le coefficient α_j est dans ce cas égal à 1 et la fonction de croyance n'est alors pas modifiée. Au contraire, si l'on suppose qu'une source S_j est non fiable, lors de la combinaison avec d'autres sources celle-ci peut alors produire une information conflictuelle. En introduisant un coefficient $\alpha_j = 0$, la fonction de croyance m_j associée à la source S_j devient alors une fonction de croyance d'ignorance totale ($m_{\alpha_j, j}(\Theta) = 1$) et donc élément neutre pour la combinaison de Dempster. Ainsi l'intérêt de l'affaiblissement est de maîtriser l'influence des sources d'information selon leur fiabilité avant de les combiner. Plusieurs méthodes ont été développées afin de définir les coefficients d'affaiblissement [27, 28].

3 Cadre générique

Dans la section précédente, nous avons vu que différents auteurs [9, 10, 11] ont proposé un certain nombre de solutions pour l'interprétation du conflit. Nous proposons ici, un cadre générique pour unifier ces différents opérateurs de combinaison.

En outre, ce cadre nous permet de définir d'autres opérateurs destinés à permettre une redistribution de la masse conflictuelle de manière locale, adaptée ou répondant à des objectifs précis.

3.1 Présentation

Le but des opérateurs de combinaison proposés, est de redistribuer la masse conflictuelle K sur un ensemble de propositions. L'ensemble de toutes les propositions A sur lesquelles la masse conflictuelle est redistribuée sera notée \mathcal{P} . Une partie de la masse K sera affectée à chaque proposition A selon un poids noté w . Ce poids pourra être fonction de la proposition considérée et des masses engendrant le conflit. Ainsi, la masse totale après fusion pour une proposition A est la somme des deux masses et s'écrit :

$$m(A) = m_{\cap}(A) + m^c(A) \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (20)$$

Dans l'équation (20), le premier terme, $m_{\cap}(A)$, correspond à la règle de combinaison conjonctive. Le second, noté $m^c(A)$, est la partie de la masse de conflit affectée à la proposition A . Cette valeur peut s'écrire :

$$\begin{cases} m^c(A) = w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J) \cdot K & \forall A \in \mathcal{P} \\ m^c(A) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (21)$$

avec comme contrainte :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J) = 1 \quad (22)$$

afin de garantir que la somme des masses d'une structure de croyance soit égale à l'unité (cf. équation (5)).

Ce cadre générique permet de réécrire les opérateurs proposés par Ph. Smets [11], Yager [9] et Dubois et Prade [10]. Il suffit pour chacun de ces opérateurs de définir l'ensemble \mathcal{P} sur lequel la masse conflictuelle sera redistribuée et les poids $w(A, m_1, \dots, m_J)$ associés à chacune des propositions $A \in \mathcal{P}$, comme nous le présentons dans les sections suivantes.

3.2 Opérateur de combinaison de Smets

Au sein du cadre générique proposé, l'opérateur de combinaison de Smets [15], présenté dans la section 2.4.2, sera alors défini de la manière suivante. L'ensemble, sur lequel la masse conflictuelle sera redistribuée, est constitué uniquement de l'ensemble vide \emptyset . Nous obtenons alors :

$$\mathcal{P} = \{\emptyset\} \quad (23)$$

et le poids associé à cette proposition est égal à 1 :

$$w(\emptyset, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J) = 1. \quad (24)$$

En discrimination, l'ensemble vide \emptyset peut être interprété comme une classe de rejet. Une variante de cette démarche [29], nécessitant une modélisation adéquate, est fondée sur l'introduction d'une nouvelle hypothèse dans le cadre de discernement.

Cette approche permet de différencier la masse conflictuelle et la masse associée au rejet. L'opérateur de fusion proposé par Smets vérifie les propriétés de commutativité et d'associativité. Enfin notons, que dans [30], Smets définit les α -jonctions comme un cadre fédérateur pour la règle purement conjonctive, la règle de combinaison disjonctive, ainsi que leur négation.

3.3 Opérateur de combinaison de Yager

Selon le cadre générique proposé précédemment (Section 3), l'opérateur de combinaison de Yager peut s'exprimer de la manière suivante. L'ensemble \mathcal{P} est constitué de l'ensemble des hypothèses du cadre de discernement, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \{\Theta\}. \quad (25)$$

Le poids associé à cet ensemble est égal à 1 ($w(\Theta, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J) = 1$). La masse conflictuelle est alors placée sur Θ . Cette méthode a pour effet de séparer la totalité de la masse conflictuelle et donc de plus, de la faire intervenir dans le processus de discernement des hypothèses. Cette règle de combinaison est commutative. Malheureusement, elle n'est pas associative. Il est donc nécessaire de définir un ordre de fusion des sources.

3.4 Opérateur de combinaison de Dubois et Prade

De même que pour l'opérateur de combinaison de Yager, l'opérateur de combinaison de Dubois et Prade [10] repose sur l'hypothèse qu'au moins une des sources intervenant dans le processus de fusion est fiable. La répartition de la masse conflictuelle proposée par Dubois et Prade est plus précise que l'approche de Yager. Afin de décrire cette combinaison, nous introduisons la notion de masse conflictuelle partielle.

Chaque source d'information S_j donne une masse de croyance à chacun des éléments focaux appartenant à \mathcal{F}_j . Quand les propositions soutenues par chacune des sources sont compatibles, c'est-à-dire lorsque les intersections entre ces propositions sont non vides, le produit des masses affectées à ces ensembles est attribué à leur intersection. Si les propositions sont incompatibles, c'est-à-dire lorsque leur intersection est égale à l'ensemble vide, nous sommes en présence d'un conflit partiel auquel correspond une masse de croyance notée m^* qui s'exprime de la manière suivante :

$$m^* = m_1(A_1) \times m_2(A_2) \times m_3(A_3) \times \dots \times m_J(A_J) \quad \text{avec} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_J = \emptyset. \quad (26)$$

Le conflit total K est la somme des masses de conflit partiel et peut s'exprimer par :

$$K = \sum^* m^* \quad (27)$$

où \sum^* est une somme dénombrable d'éléments. Ainsi, à partir de ce formalisme, nous pouvons décrire le principe de combinaison pour deux sources d'information de la manière suivante. Soit S_1 une source soutenant la proposition A_1 avec une masse de croyance $m_1(A_1)$ et soit une source S_2 soutenant la proposition A_2 avec une masse de croyance $m_2(A_2)$. Si les

propositions A_1 et A_2 sont en contradiction, c'est-à-dire si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, alors on ne sait pas quelle source dit la vérité et l'on doit considérer que la solution est l'une des deux propositions. La masse conflictuelle partielle $m_1(A_1).m_2(A_2)$ sera affectée à la proposition $A_1 \cup A_2$. Dans la situation générale de ce type de combinaison, nous avons une proposition A , où les masses de conflit partiel sont redistribuées de telle sorte que :

$$\mathcal{P} = \{A \subseteq \Theta \mid \exists A_1 \in \mathcal{F}_1, \exists A_2 \in \mathcal{F}_2, A = A_1 \cup A_2 \text{ et } A_1 \cap A_2 = \emptyset\}. \quad (28)$$

La totalité de la masse de conflit est affectée à chacune des propositions de \mathcal{P} à l'aide d'un poids w . Ce poids s'écrit dans le cas de cet opérateur de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P} \quad w(A, m_1, m_2) = \frac{1}{K} \sum_{\substack{A_1, A_2 : A_1 \cup A_2 = A \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset}} m_1(A_1)m_2(A_2). \quad (29)$$

On peut remarquer que le calcul des poids ne dépend plus exclusivement des propositions auxquelles ils sont associés, mais aussi des masses de croyance à l'origine des conflits partiels. Les masses de croyance engendrant le conflit permettent ainsi de calculer la redistribution de la masse conflictuelle. Cette règle de combinaison est plus précise dans la redistribution de la masse de conflit et donc plus fine et adaptée que la règle de Yager. En outre, dans l'étape de décision, la masse conflictuelle à redistribuer interviendra dans le discernement des hypothèses en compétition. On peut noter que cette règle de combinaison utilise une approche conjonctive quand les sources sont en accord et une approche disjonctive en cas de conflit. Comme pour la règle de combinaison de Yager, l'opérateur de fusion proposé par Dubois et Prade est commutatif mais n'est pas associatif. Une stratégie permettant de combiner les sources dans un ordre précis doit être définie.

3.5 Relation avec l'affaiblissement

Dans la section précédente (cf. Section 2.4.2), nous avons vu que l'on pouvait gérer le conflit à l'aide de coefficients d'affaiblissement. De la même manière que pour les opérateurs classiques (Smets, Yager, Dubois et Prade), nous pouvons, dans le cadre du formalisme que nous proposons, reproduire les résultats obtenus via cet affaiblissement. En effet, la relation liant les poids aux coefficients d'affaiblissement (le raisonnement pour l'obtention de cette relation est décrit en annexe) démontrent que la gestion du conflit à l'aide d'un affaiblissement n'est qu'un cas particulier dans le cadre générique présenté.

Nous mettons, ainsi, en évidence le fait que l'opérateur introduit ici permet de prendre en compte la plupart des stratégies de gestion de conflit selon les poids accordés à chacune des propositions concernées par la redistribution de la masse conflictuelle.

3.6 Méthodes de calcul des poids

Nous avons vu dans les sections précédentes que le cadre générique introduit permettait de retrouver les opérateurs classiques. A partir de la définition de \mathcal{P} et des poids $w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J)$ associés à chaque sous-ensemble $A \in \mathcal{P}$,

il est ainsi possible de décliner différents opérateurs. Dans [31], nous avons présenté deux opérateurs particuliers de cette famille. Le but des opérateurs de combinaison ainsi proposés, était de redistribuer la masse conflictuelle parmi les sous-ensembles qui ont produit le conflit. Ainsi, le conflit partiel m^* était redistribué proportionnellement à un poids parmi les sous-ensembles concernés par sa génération. Les poids étaient calculés à l’aide des masses de chacun des sous-ensembles impliqués dans le conflit partiel. Pour le premier opérateur, ce conflit était redistribué uniquement sur les sous-ensembles l’occasionnant. Le second opérateur de combinaison permettait de répartir le conflit sur les sous-ensembles mais aussi sur leur disjonction¹. Mais d’autres stratégies peuvent être mises en place. Dans cette section, nous présentons différentes méthodes d’obtention des poids $w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J)$ pour chaque sous-ensemble $A \in \mathcal{P}$.

3.6.1 Répartition du conflit par une expertise

Le formalisme de combinaison ainsi introduit peut s’avérer utile dans le cas d’une connaissance supplémentaire afin de résoudre le conflit. Un expert spécialiste de l’application à traiter peut fournir cette connaissance. En effet, dans des domaines tels que les applications médicales, les applications de détection de cible ou d’obstacles, les non-détections ont des conséquences plus importantes dans la prise de décision. Dans ces domaines, la masse conflictuelle sera attribuée à l’hypothèse la plus prudente. Comme exemple, considérons un système de détection d’obstacles à l’avant d’un véhicule muni de deux capteurs de distance. Lors d’une mesure, les informations issues des deux capteurs peuvent être conflictuelles (1 mètre et 10 mètres). Il convient dans ce cas de privilégier l’information qui donne la distance la plus faible pour ne pas mettre en danger la vie du conducteur. Lorsqu’aucune connaissance supplémentaire ne peut être fournie par un expert, nous pouvons adopter une stratégie prudente en répartissant la masse conflictuelle sur les éléments focaux les plus grands (c’est-à-dire en accordant un poids plus important à ces éléments) ou en les apprenant de manière automatique comme nous le proposons dans la section suivante.

3.6.2 Apprentissage automatique à l’aide de fonction de coût

Avant d’aborder l’approche automatique de l’apprentissage des poids, nous allons introduire une grandeur particulière proposée par Smets pour la prise de décision dans le cadre des fonctions de croyance. Smets [32, 15] propose de définir une distribution de probabilité particulière *BetP*, dite pignistique afin de prendre la décision. Cette probabilité pignistique est obtenue en répartissant la masse de croyance $m(A)$ à part égale entre les éléments de A . Nous avons donc :

$$BetP(H_n) = \sum_{\substack{H_n \in A \\ A \subseteq \Theta}} \frac{m(A)}{|A|}, \quad \forall H_n \in \Theta \quad (30)$$

où $|A|$ représente le cardinal de l’ensemble $A \subseteq \Theta$.

¹Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [31]

Nous proposons un apprentissage des poids à partir des données d'apprentissage par minimisation d'une fonction d'erreur. Cette fonction d'erreur sera définie à l'aide de l'erreur quadratique moyenne entre la probabilité pignistique $BetP$ calculée à l'aide de l'équation (30) et l'indicateur d'appartenance à chaque hypothèse. L'erreur quadratique moyenne E_{MS} de l'ensemble des vecteurs de la base d'apprentissage est alors définie par l'équation suivante :

$$E_{MS}(w) = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N [BetP^{(i)}(H_n) - u_n^i]^2 \quad (31)$$

où $BetP^{(i)}$ représente la probabilité pignistique d'un vecteur $X^{(i)}$ de la base d'apprentissage. Ce critère a déjà été utilisé pour l'optimisation de paramètres [20, 21]. De la même manière, nous déterminons l'ensemble des poids $w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J)$ pour $A \in \mathcal{P}$ en minimisant la fonction décrite par l'équation (31).

4 Résultats

Nous présentons différents résultats qui nous permettent de décrire les comportements des différentes stratégies de calcul des poids pour la répartition de la masse conflictuelle. Dans un premier temps, nous reprendrons le test présenté par Zadeh [8] afin de comparer le comportement en fonction du conflit de l'opérateur de Dempster et de la stratégie que nous proposons (Section 4.1). Nous présentons, ensuite, une comparaison entre l'opérateur de Dempster et notre stratégie de redistribution de conflit en terme d'interprétation de la masse résultante (Section 4.2). De plus, nous verrons l'évolution des frontières de décision sur des données synthétiques (Section 4.3). Un test sur une base de données médicales permettra de mettre en évidence les bénéfices issus de la connaissance d'un expert pour la répartition du conflit (Section 4.4). Enfin, une illustration des performances en terme de classification avec un apprentissage des poids sera présentée dans la section 4.5.

Afin de modéliser les masses initiales, plusieurs méthodes existent (cf. Section 2.1). Pour les tests qui vont suivre, nous avons obtenu les fonctions de croyance à l'aide d'un modèle basé sur une mesure de dissimilarité [20, 21]. Considérons un nouvel individu de vecteur forme X connu et de vecteur d'appartenance u inconnu. Si un élément de vecteur forme $X^{(i)}$ et d'étiquette $u_n^i = 1$ de l'ensemble d'apprentissage \mathcal{X} est proche de X dans l'espace des caractéristiques alors une partie de la croyance sera affectée à H_n et le reste à l'ensemble des hypothèses du cadre de discernement. Ainsi, nous obtenons alors à partir de l'élément i une masse de croyance ayant l'expression suivante :

$$\begin{aligned} m_i(\{H_n\}) &= \alpha \phi_n(d(X, X^{(i)})) \\ m_i(\Theta) &= 1 - \alpha \phi_n(d(X, X^{(i)})) \end{aligned} \quad (32)$$

où $0 < \alpha < 1$ est une constante et ϕ_n est une fonction décroissante monotone vérifiant $\phi_n(0) = 1$ et $\lim_{d \rightarrow \infty} \phi(d) = 0$, $d(X, X^{(i)})$ la distance euclidienne entre X et $X^{(i)}$. La fonction ϕ_n peut être une fonction exponentielle de la forme :

$$\phi_n(d) = \exp(-\gamma_n d^2) \quad (33)$$

où γ_n est un paramètre associé à chaque hypothèse H_n . Jusqu'à présent, nous n'avons considéré pour l'appartenance de X qu'un seul élément de \mathcal{X} . Si la même opération est répétée pour l'ensemble des I exemples d'apprentissage, on obtient alors I fonctions de croyance qui peuvent être combinées à l'aide de l'un des opérateurs étudiés. En pratique, les éléments éloignés de X ont peu d'influence et peuvent être négligés. Deux techniques peuvent alors être mise en oeuvre. Dans la première approche, on ne prend en compte que les k plus proches voisins de X [20]. Cette approche a été utilisée pour les tests élaborés dans la section 4.5. La seconde approche repose sur la caractérisation des données d'apprentissage à l'aide de prototypes [21]. Chacun des prototypes, initialisés par un algorithme de type C-means, permet la construction d'une fonction de croyance. Nous avons utilisé cette approche pour les tests réalisés dans les sections 4.1 à 4.4.

4.1 Sensibilité de l'opérateur de Dempster

La description des fonctions de croyance utilisées pour ce test est présentée dans la section 2.3. Avec ce test, nous allons comparer les résultats de la combinaison de Dempster avec ceux obtenus avec deux répartitions de conflit différentes. La première combinaison considérée répartit la masse conflictuelle de manière uniforme sur l'ensemble des hypothèses singletons :

$$w_1(\{H_n\}, m_1, m_2) = 1/3 \quad \forall \quad n \in \{1, \dots, 3\} \quad (34)$$

et la seconde :

$$w_2(\{H_1\}, m_1, m_2) = w_2(\{H_3\}, m_1, m_2) = 0.1 \quad w_2(\{H_2\}, m_1, m_2) = 0.8. \quad (35)$$

Les masses résultantes de ces combinaisons sont représentées en fonction du conflit sur les figures FIG. 3 et FIG. 4. A l'aide de ces figures, nous pouvons constater que les masses combinées avec la stratégie que nous proposons varient linéairement en fonction du conflit alors que les masses obtenues avec la combinaison de Dempster varient fortement en cas de conflit important.

4.2 Répartition de la masse résultante

Dans un premier temps, nous allons voir comment on peut interpréter le jeu de masses fusionné à l'aide de l'opérateur que nous proposons et l'interprétation qui peut être faite sur le jeu de masses issu de la combinaison de Dempster. Les fonctions de croyance sont construites à l'aide de la méthode proposée par Denoeux [21]. Pour ce test, nous considérons trois hypothèses gaussiennes avec les moyennes μ_n et les matrices de variances Σ_n suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (0, 2)^t & \mu_2 &= (-2, 0)^t & \mu_3 &= (2, 0)^t \\ \Sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

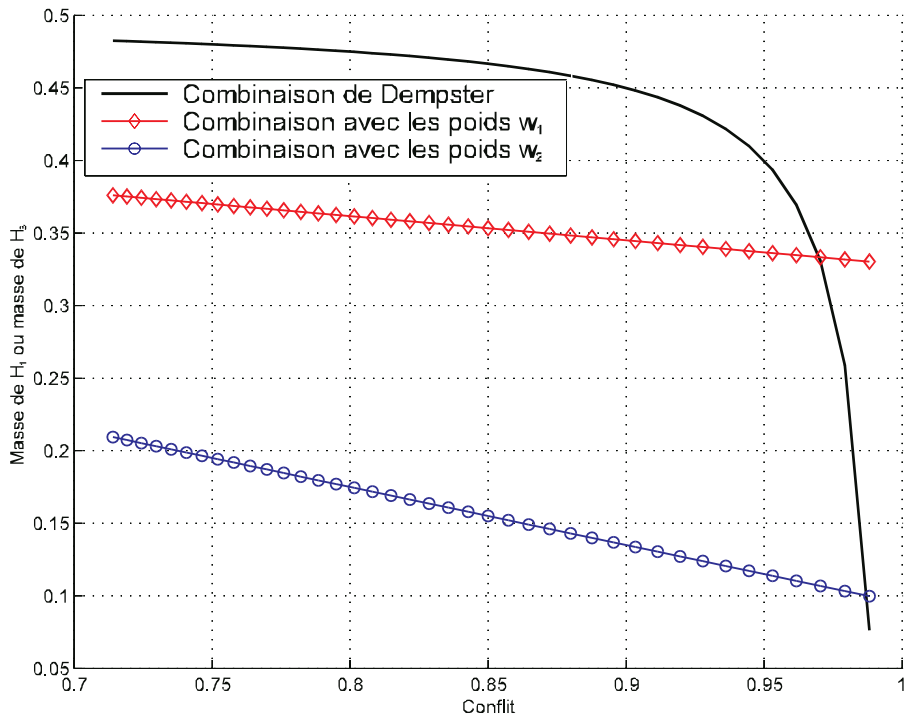


FIG. 3 – Evolution de la masse de H_1 en fonction du conflit K .

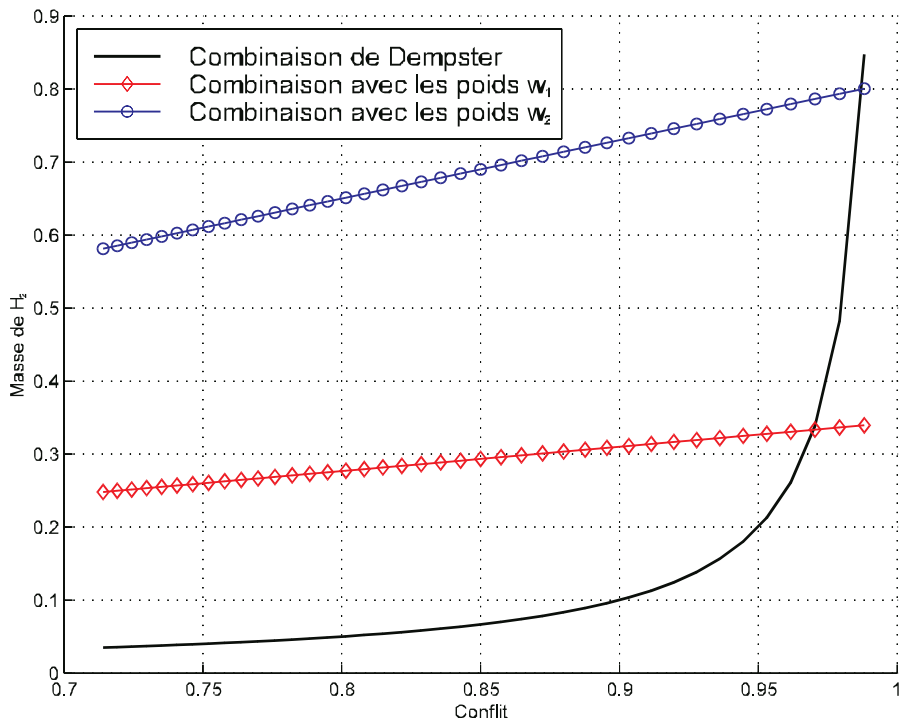


FIG. 4 – Evolution de la masse de H_2 en fonction du conflit K .

Lors de la phase d'apprentissage, chacune des hypothèses contient 300 vecteurs. Les fonctions de croyance sont construites en utilisant trois prototypes par classe, nous avons ainsi trois fonctions de croyance par classe. Sur la figure FIG. 5, nous avons représenté les exemples d'apprentissage constituant ces trois classes dans l'espace des caractéristiques. De plus, sur cette figure, nous pouvons visualiser la localisation du conflit ainsi que son amplitude. Nous remarquons que les zones

conflictuelles ainsi représentées reflètent l’ambiguïté d’appartenance des exemples à l’une ou à l’autre des classes. Sur les

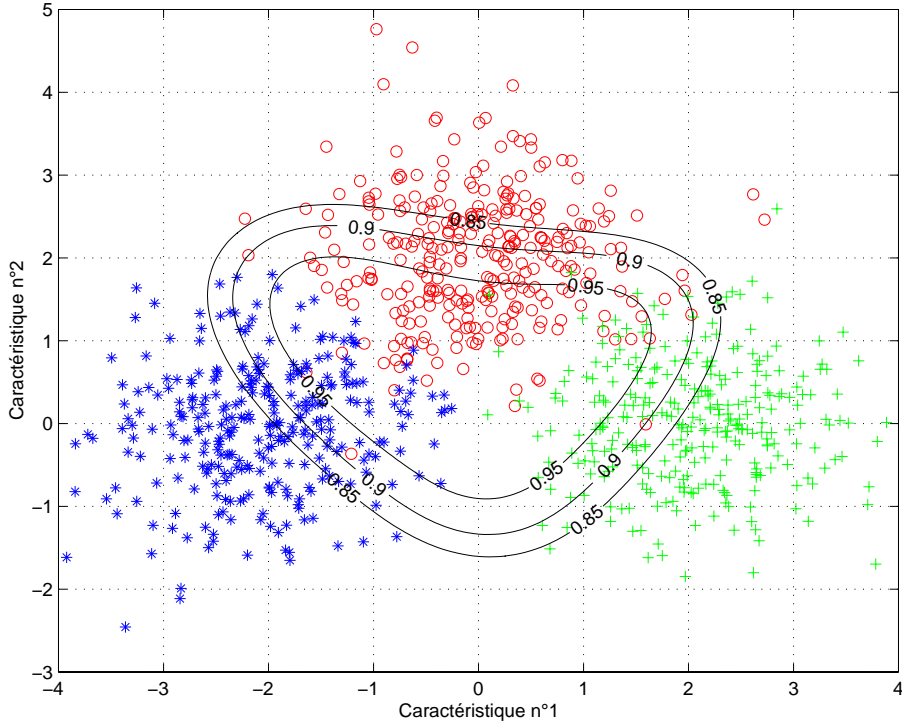


FIG. 5 – Contour du conflit dans l’espace des caractéristiques (o= H_1 , *= H_2 et += H_3).

figures FIG. 6 et FIG. 7, nous avons représenté l’évolution, dans l’espace des caractéristiques, de la valeur maximale de la masse de croyance fusionnée avec l’opérateur de Dempster et avec l’opérateur que nous proposons. Sur ces figures, plus les zones sont claires plus la valeur maximale de la masse de croyance est importante. Les valeurs de poids utilisés pour la redistribution du conflit sont les suivantes :

$$w(\{H_n\}, m_1, \dots, m_9) = 1/3 \quad \forall n \in \{1, 2, 3\}. \tag{37}$$

Avec ce choix de poids, nous ne privilégions aucune hypothèse lors de la redistribution du conflit. Nous pouvons constater sur la figure FIG. 6 que les transitions entre les valeurs maximales des masses se font de manière brutale. Sur la figure FIG. 7, la variation de la masse de croyance maximale est moins brutale. En effet, le passage entre les différents maxima de la masse de croyance s’effectue en passant par un plateau caractérisant la zone où les sources d’information sont en conflit. La valeur de la masse de croyance pour les trois hypothèses dans cette zone est approximativement 1/3, reflétant ainsi le conflit et se traduisant par une absence de prise de décision. Ainsi, le jeu de masses résultant de la fusion avec notre approche permet de conserver l’information conflit pour la prise de décision au contraire de l’opérateur de Dempster.

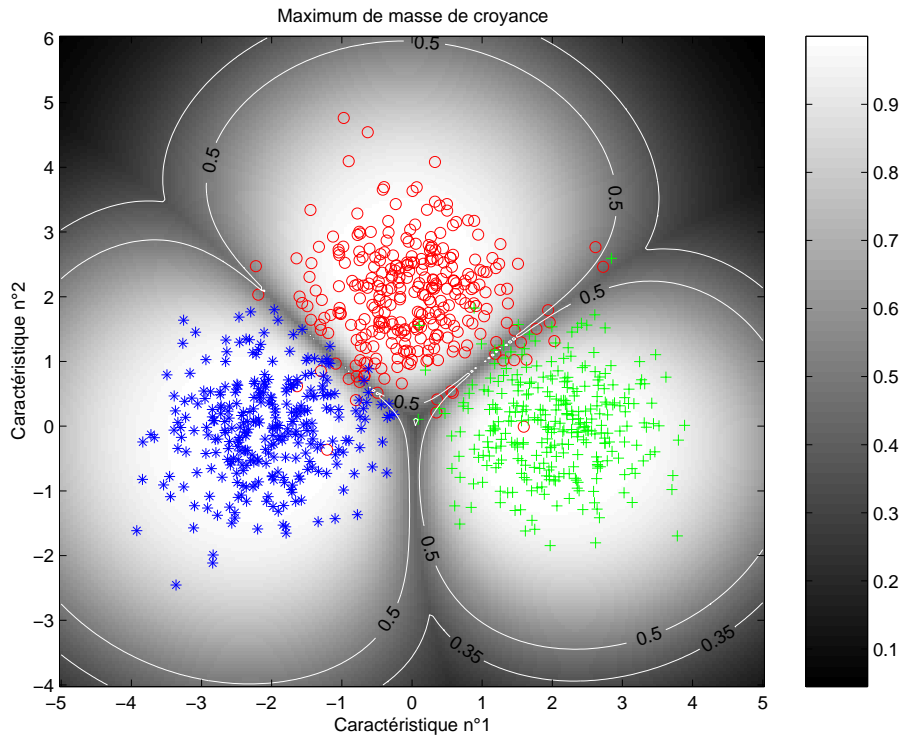


FIG. 6 – Maximum de masse de croyance obtenu avec la combinaison de Dempster ($\circ=H_1$, $\ast=H_2$ et $\+=H_3$).

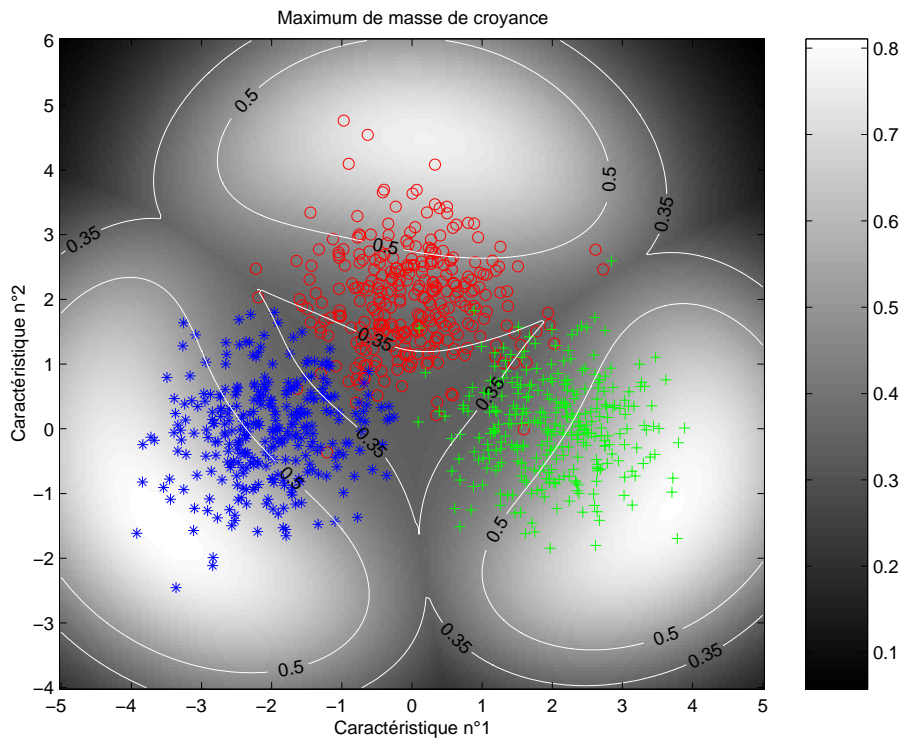


FIG. 7 – Maximum de masse de croyance obtenu avec notre approche ($\circ=H_1$, $\ast=H_2$ et $\+=H_3$).

4.3 Evolution des frontières de décision

Nous étudions, maintenant, l'évolution des frontières de décision en fonction des poids pour la redistribution de la masse conflictuelle. Pour cela, nous considérons un problème à deux hypothèses. Les données sont simulées de la manière suivante.

L'apprentissage disponible est donné sous la forme de distributions normales avec les moyennes μ_n et les variances Σ_n suivantes :

$$\mu_1 = (0, 0)^t \quad \mu_2 = (3, 3)^t$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Les fonctions de masse, de la même manière que précédemment, sont obtenues en utilisant trois prototypes par classe. Les données des deux classes sont représentées sur la figure FIG. 8. Les exemples appartenant à l'hypothèse H_1 sont symbolisés par des cercles et les exemples de l'hypothèse H_2 par des croix. Les frontières de décision caractérisées par les contours de la probabilité pignistique sont représentées sur les figures FIG. 8 et FIG. 9 pour différentes distributions de poids. Sur ces figures, les prototypes utilisés pour la modélisation sont représentés par un cercle noir pour l'hypothèse H_1 et par une croix noire pour l'hypothèse H_2 . Sur la figure FIG. 8, les poids sont répartis de la manière suivante : $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4$ et $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6$. Dans ce cas, la masse conflictuelle sera répartie de manière plus importante sur l'hypothèse H_2 au détriment de l'hypothèse H_1 . Nous pouvons constater que la frontière de décision, représentée dans ce cas par une probabilité pignistique égale à 0.5, est décalée vers le centre de l'hypothèse H_1 . Ainsi les points appartenant à la zone d'ambiguïté seront affectés majoritairement à l'hypothèse H_2 . De la même manière sur la figure FIG. 9, où les poids sont

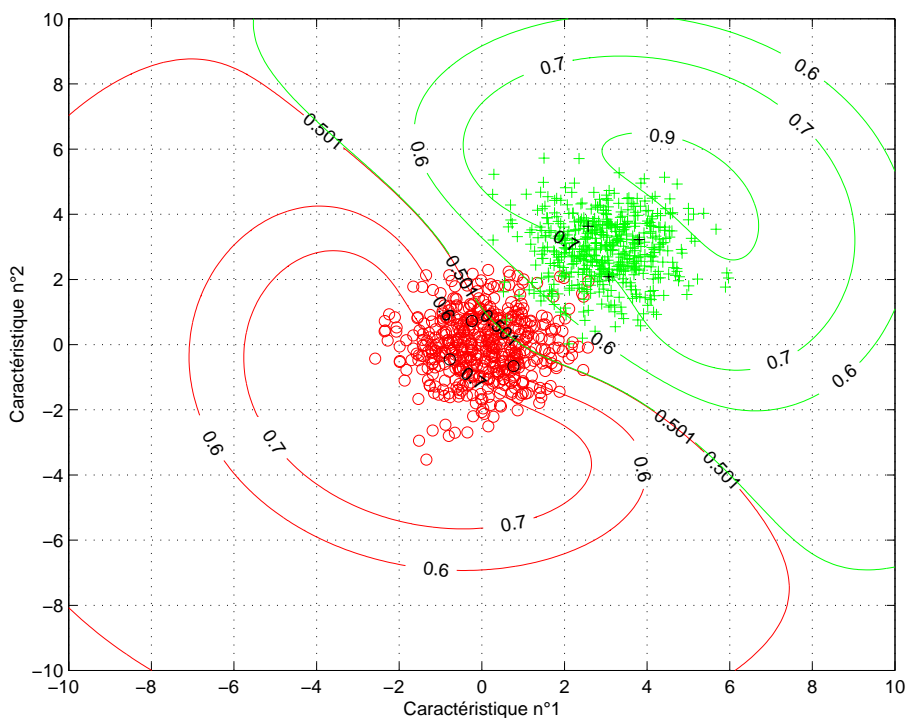


FIG. 8 – Contour de la probabilité pignistique dans l'espace des caractéristiques avec $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4$ et $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6$ (o= H_1 , += H_2).

répartis ainsi : $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6$ et $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4$, la masse conflictuelle sera redistribuée plus sur l'hypothèse H_1 que sur l'hypothèse H_2 et ainsi les exemples où le conflit est important, seront affectés à l'hypothèse

H_1 . Enfin, sur la même base de données, nous avons simulé les frontières de décision obtenues à l'aide de la probabilité

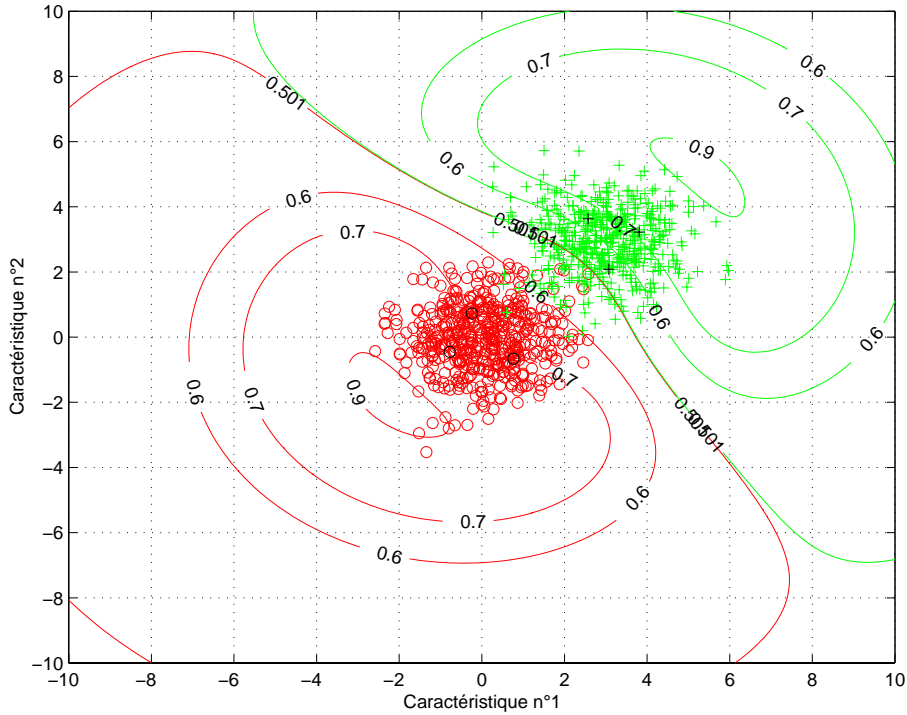


FIG. 9 – Contour de la probabilité pignistique dans l'espace des caractéristiques avec $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6$ et $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4$ (o= H_1 , += H_2).

pignistique. Nous supposons deux cas.

Affaiblissement : Dans un premier temps, nous considérons le cas où les fonctions de croyance sont affaiblies et combinées ensuite avec l'opérateur de Dempster. Nous pouvons alors considérer plusieurs stratégies. Soit, nous considérons que les sources associées à l'hypothèse H_2 (c'est-à-dire les prototypes dans le cas de la modélisation choisie) sont peu fiables et sont donc affaiblies par rapport à celles associées à H_1 . Cette situation est appelée α_1 . La situation inverse, c'est-à-dire lorsque l'on affaiblit uniquement les sources associées à H_1 , est notée α_3 . Enfin, la situation où les sources sont affaiblies de la même manière est notée α_2 . Pour ce test, nous avons associé un coefficient d'affaiblissement de 0.5 pour une source dite non fiable. Les fonctions de croyance issues de sources fiables ne sont pas modifiées. Les frontières de décision obtenues sont représentées sur la figure FIG. 10.

Redistribution de la masse conflictuelle à l'aide de poids : Dans le second cas, les fonctions de croyance ne sont pas affaiblies et elles sont fusionnées avec la méthode proposée. On peut alors :

- soit privilégier l'hypothèse H_1 par rapport à H_2 , on accorde alors un poids plus important à l'hypothèse H_1 qu'à l'hypothèse H_2 :

$$w_1(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6 \quad \text{et} \quad w_1(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4,$$

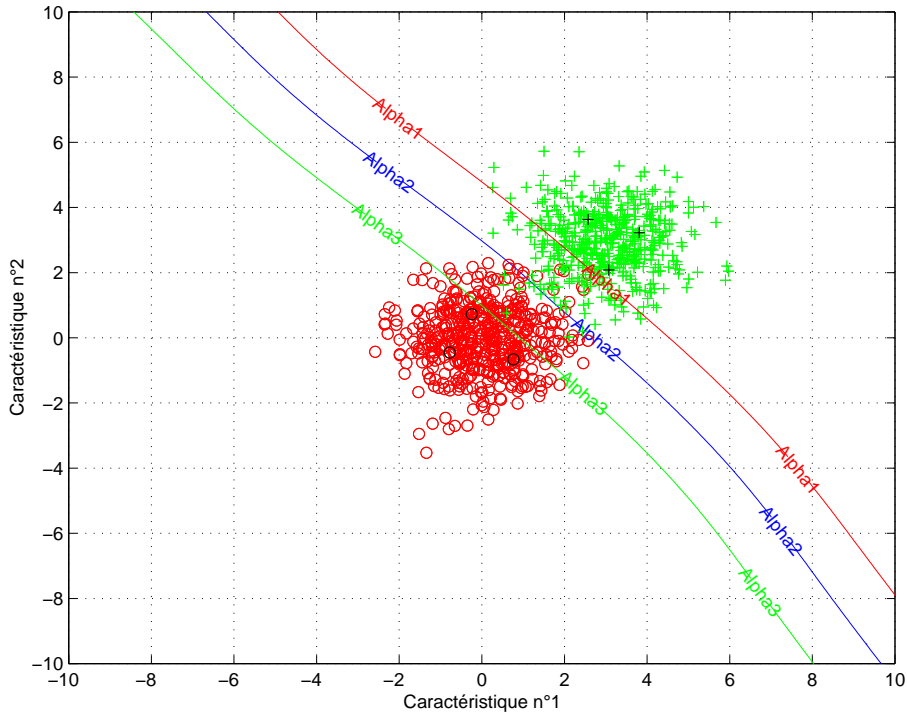


FIG. 10 – Frontières de décision selon les différentes situations d'affaiblissement α_1 , α_2 et α_3 ($o=H_1$, $+ = H_2$).

- soit au contraire associer un poids plus important à l'hypothèse H_2 par rapport à H_1

$$w_3(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.6 \quad \text{et} \quad w_3(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.4,$$

- soit ne privilégier aucune des deux hypothèses en leur accordant un poids identique :

$$w_2(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = w_2(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.5.$$

Les frontières de décision obtenues sont représentées sur la figure FIG. 11. On peut constater sur la figure FIG. 10, que les frontières de décision, obtenues avec différentes stratégies d'affaiblissement, ont uniquement subi une translation. Ainsi l'affaiblissement de source d'information modifie la totalité de la frontière de décision. Sur la figure FIG. 11, on peut remarquer qu'en fixant les poids associés à chaque hypothèse pour la combinaison, les frontières de décision ne sont modifiées que sur la zone la plus conflictuelle. Dans les zones où le conflit est faible, les frontières de décision convergent. Toutefois, on peut remarquer que, dans le cas où les poids dépendent des fonctions de masses, les résultats obtenus avec les coefficients d'affaiblissement auraient pu être retrouvés (cf. Annexe).

4.4 Connaissance experte

Le but de ce test consiste à montrer l'utilité du cadre que nous proposons en présence d'une connaissance supplémentaire issue d'un expert. De manière à mettre en évidence les avantages de ce cadre, nous avons choisi de réaliser un test sur une base de données médicales. La pathologie à diagnostiquer est le diabète [33]. Le jeu de données est composé de 768 individus

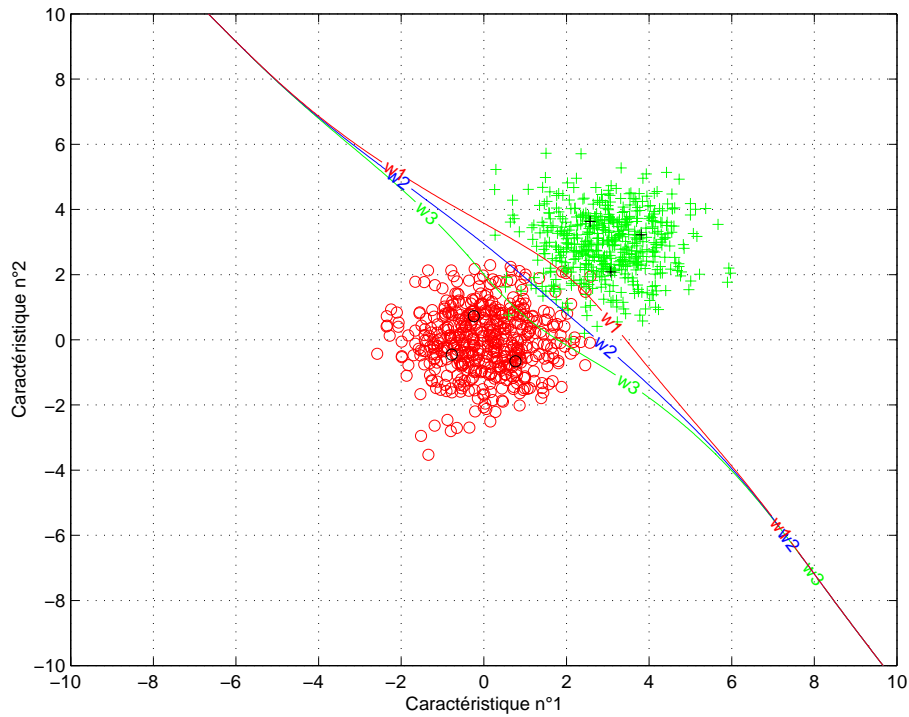


FIG. 11 – Frontières de décision obtenues avec la méthode proposée pour différentes stratégies de redistribution de la masse conflictuelle w_1 , w_2 et w_3 ($o=H_1$, $+ = H_2$).

répartis en deux classes : patients sains (hypothèse H_1) et pathologiques (hypothèse H_2). Les huit variables observées sont extraites soit de tests cliniques réalisés sur les patients ou de caractéristiques propres aux patients (antécédents, âge, ...). La classe des patients sains est représentée par 500 individus tandis que la classe des patients atteints de diabète compte 268 patients dans la base. Le critère de décision employé, pour les résultats présentés ici, est le maximum de probabilité pignistique. On peut alors supposer que plusieurs experts ayant des objectifs différents interviennent afin de définir les valeurs de poids pour la redistribution du conflit. L'expert n°1 peut, par exemple, vouloir minimiser l'erreur de classification et par ce biais optimiser les valeurs des poids. Un autre expert (Expert n°2) souhaite détecter l'ensemble (ou le maximum) de cas pathologiques en s'autorisant des fausses alarmes c'est-à-dire des patients sains qu'il diagnostiquerait diabétiques. Cet avis consiste donc à répartir le conflit sur l'hypothèse pathologique en s'imposant les poids $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0$ et $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 1$. Enfin, l'expert n°3 préfère considérer que l'existence d'un conflit est révélateur d'une autre maladie (connue ou inconnue) que le diabète et ainsi rejeter la prise de décision. Pour cela, la masse conflictuelle sera conservée sur l'ensemble vide ($w(\emptyset, m_1, \dots, m_2)$). Les différents résultats sont présentés dans le tableau TAB. 1.

Sur ce tableau, on peut constater que pour l'expert n°1 les valeurs de poids permettent d'obtenir un taux de bonne classification de l'ordre de 0.765. De la même manière, la connaissance apportée par l'expert n°2 conduisent à un taux d'erreur de l'ordre de 0.569. Même si ce taux est important, il est à noter que seulement 12 patients pathologiques ont été classés sains minimisant ainsi le nombre de non-détection. Enfin, les connaissances de l'expert n°3, qui considère que le

	Non détection	Fausse alarme	Bonne classification	Rejet
Expert n°1 : poids optimisés $w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_6) = 0.57$ $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 0.43$	0.552	0.03	0.765	0
Expert n°2 : poids fixés $w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_6) = 1$	0.044	0.850	0.431	0
Expert n°3 : poids fixés $w(\emptyset, m_1, \dots, m_6) = 1$	0.132	0.280	0.807	0.817

TAB. 1 – Résultats de bonne classification selon la combinaison employée.

cadre de discernement n'est pas exhaustif et associe l'ensemble vide à une hypothèse de rejet, permettent d'obtenir un taux de bonne classification 0.807 en rejetant près de 82% des patients. Notons que dans le cas particulier d'un problème de discrimination, ces résultats aurait pu être obtenus de manière classique en modifiant les coûts de décision. Toutefois, dans certaines applications, où il ne s'agit pas, après la fusion, de prendre une décision sur la fonction de probabilité pignistique mais de dégager une tendance générale ou de déterminer une préférence entre plusieurs possibilités [34], il est nécessaire et utile de fournir une information (exemple : une fonction de croyance) capable de rendre compte de l'incertitude sur le résultat. Le choix de poids particuliers, nous semble plus approprié. En effet, dans ce cas l'utilisation de coûts de décision, qui ne modifient pas les masses de croyance, n'est pas adéquate.

4.5 Apprentissage des poids

Pour ce test, nous considérons un problème à deux sources et à deux capteurs. L'ensemble d'apprentissage disponible est issu de distributions normales de moyenne μ_n et de matrice de variance Σ_n :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (2, 2)^t & \mu_2 &= (4, 4)^t \\ \Sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

alors que les mesures simulées, constituant la base de test, suivent les distributions de moyenne μ'_n et de variance Σ'_n suivantes :

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= (2 + S, 2 + S)^t & \mu'_2 &= (4 + S, 4 + S)^t \\ \Sigma'_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Sigma'_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Ce test représente le cas classique de dérive de capteurs. En effet, dans l'exemple présenté, les mesures issues des capteurs varient linéairement en fonction d'un signal S (FIG. 12 et FIG. 13). Les ensembles d'apprentissage et de test sont constitués de

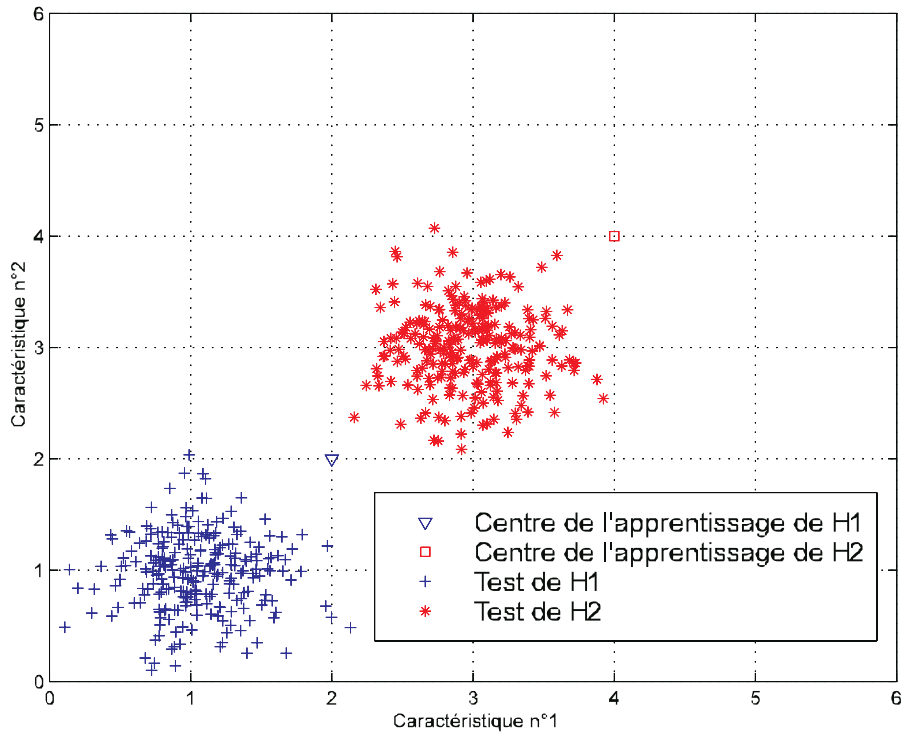


FIG. 12 – Représentation des données simulées pour $S = -1$.

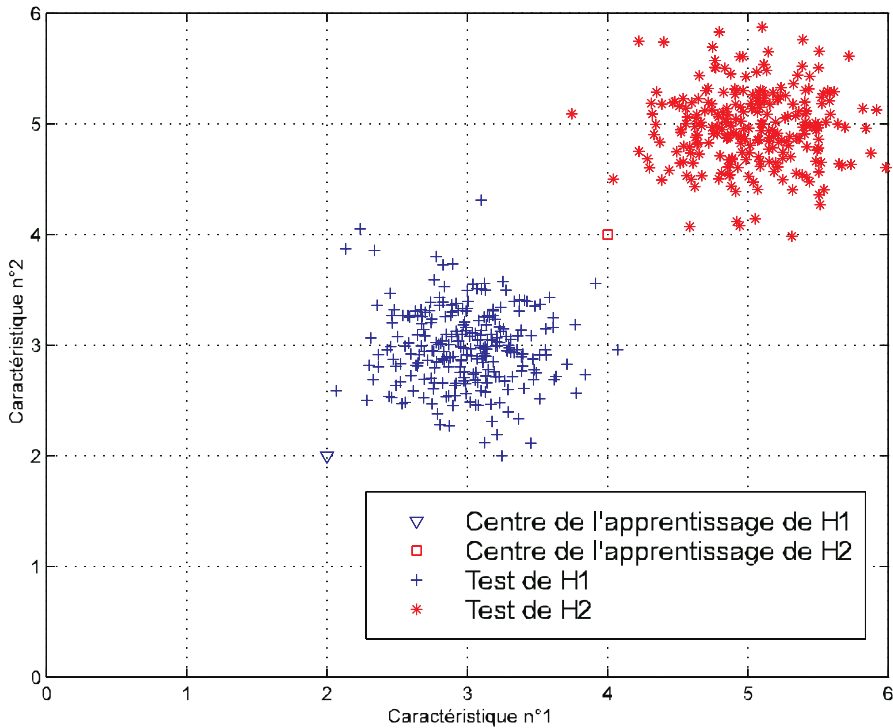


FIG. 13 – Représentation des données simulées pour $S = 1$.

250 vecteurs par hypothèse. Les fonctions de croyance sont obtenues à l'aide de la méthode des K-ppv crédibilistes proposée par Denoeux [20]. Pour ce test, nous prendrons un nombre de voisins égal à 5. La décision est prise sur le critère du maximum de probabilité pignistique. Les données constituant la base de validation seront simulées de la même manière que les données

de la base de test avec les distributions présentées dans l'équation (40). Ces données permettent de définir les valeurs des poids $w(A \in \mathcal{P}, m_1, \dots, m_5)$ à l'aide de l'erreur quadratique moyenne définie par l'équation (31). Les résultats en terme de taux de classification, obtenus en réalisant une moyenne sur 10 tirages, sont représentés sur la figure FIG. 14. D'après cette

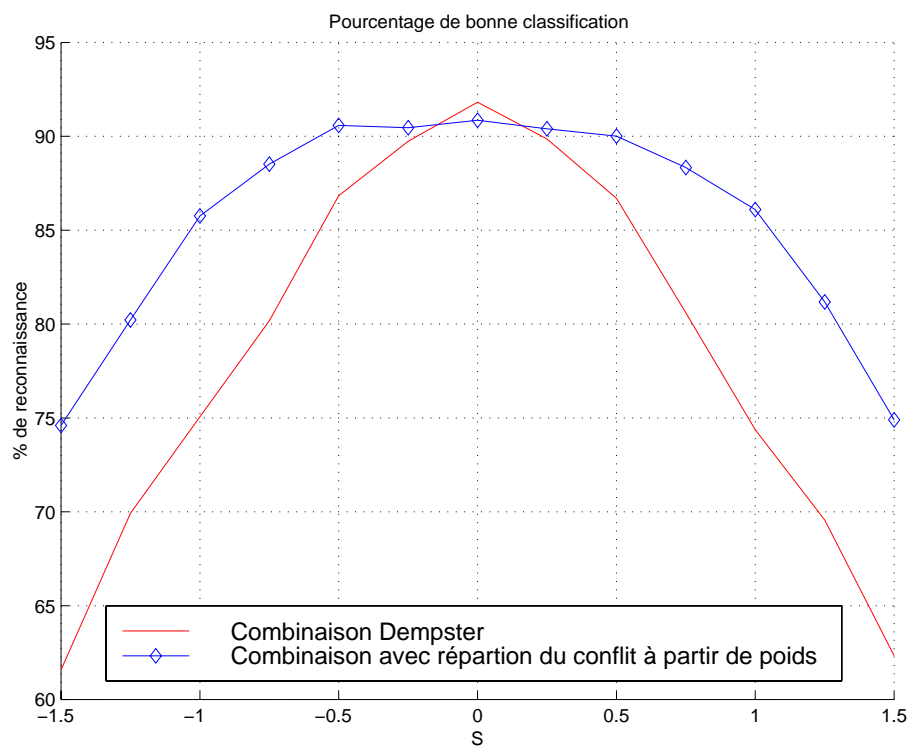


FIG. 14 – Evolution du pourcentage de bonne classification en fonction de S.

figure, nous pouvons constater que la démarche de calcul des poids pour la redistribution de la masse conflictuelle présentée ici permet d'obtenir un gain de classification notable par rapport à l'emploi de la combinaison classique de Dempster. En effet, lorsque la dérive du capteur est importante, c'est-à-dire lorsque $|S| \in [0.5, 1.5]$, le pourcentage de bonne classification obtenu par la répartition du conflit à l'aide de poids est de l'ordre de 10% supérieure à celui obtenu par la combinaison de Dempster. Lorsque la dérive des capteurs est faible, c'est-à-dire $S \approx 0$, les résultats entre les deux combinaisons sont similaires. La figure FIG. 15 représente l'évolution des poids de répartition du conflit en fonction de S. Nous pouvons constater que dans le cas d'un apprentissage correct, c'est-à-dire $S \approx 0$, la répartition du conflit se fera équitablement entre les deux hypothèses ($w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_5) = w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_5) = 0.5$). Par contre, dans le cas où les données de test de l'hypothèse H_1 se situe dans la zone conflictuelle (c'est-à-dire lorsque $S > 0$), le poids accordé à l'hypothèse H_1 sera supérieur au poids associé à l'hypothèse H_2 ($w(\{H_1\}, m_1, \dots, m_5) > w(\{H_2\}, m_1, \dots, m_5)$). De la même manière, lorsque $S < 0$ le poids associé à l'hypothèse H_2 pour la répartition de la masse conflictuelle est plus important que celui attribué à H_1 .

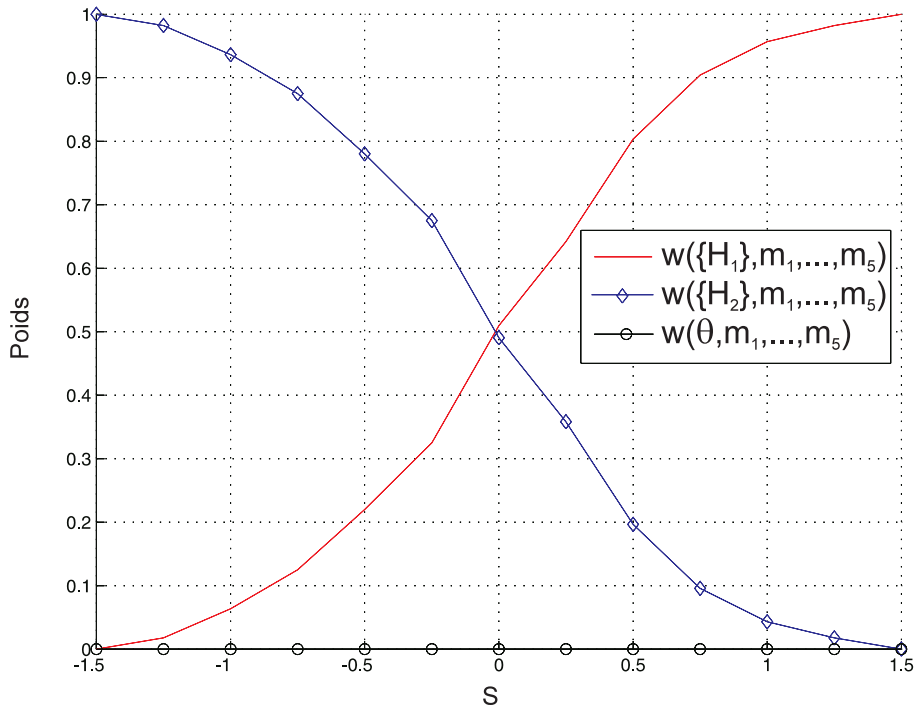


FIG. 15 – Evolution des poids en fonction de S .

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un cadre générique pour la fusion de sources d'information modélisées à l'aide de fonctions de croyance. A partir de ce cadre de travail, nous avons retrouvé les opérateurs classiques de combinaison utilisés au sein de la théorie de l'évidence. De fait, ce cadre générique permet de définir une famille d'opérateurs de combinaison. En effet, il est possible de décliner différents opérateurs à partir :

- de la définition d'un ensemble \mathcal{P} , regroupant les propositions A où la masse conflictuelle sera redistribuée,
- et de poids, notés $w(A, m_1, \dots, m_j, \dots, m_J)$, associés à chacune des propositions $A \in \mathcal{P}$.

Nous avons proposé plusieurs méthodes d'obtention des poids. L'une de ces méthodes est fondée sur l'intégration d'une connaissance supplémentaire que pourrait fournir un expert afin de résoudre le conflit. La seconde méthode repose sur la détermination des poids en minimisant l'erreur quadratique moyenne. Cette seconde technique est adaptée aux problèmes de discrimination auquel nous nous sommes intéressés dans cet article. Ces deux méthodes ont été testées et comparées à la combinaison de Dempster utilisée classiquement dans la théorie de l'évidence. Le but du formalisme présenté consistant à proposer des solutions admissibles à la gestion adaptée du conflit a été mise en évidence par ces simulations. Une perspective intéressante consisterait à utiliser l'opérateur proposé pour des problèmes d'agrégation d'avis d'experts. Ainsi l'optimisation des poids w pour atteindre une fonction de croyance cible donnée comme référence pourrait être faite en modifiant le critère d'erreur utilisé en discrimination.

Annexe : affaiblissement vs. combinaison

Lors de la combinaison d'informations, les sources impliquées dans cette combinaison ne soutenant pas obligatoirement des informations concordantes, un conflit peut se produire. Cette annexe détaille le calcul permettant de mettre en évidence le lien existant entre une gestion de conflit basée sur un affaiblissement (source non fiable) et une gestion basée sur une redistribution du conflit à l'aide de poids accordés à chaque proposition.

Soit une fonction de croyance m_j obtenue à partir d'une source d'information S_j . La fonction de communalité q_j associée à la fonction m_j est définie de la manière suivante :

$$q_j(A) = \sum_{A \subseteq B} m_j(B) \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (41)$$

De plus, la transformée de Möbius inverse permet, à partir de la fonction de communalité q_j , de retrouver la distribution de masse par la relation suivante :

$$m_j(A) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} q_j(B) \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (42)$$

Résultats de la combinaison de jeux de masses affaiblies

Expression de la fonction de communalité issue de jeux de masses affaiblies

Soit un ensemble de fonctions de croyance $\{m_1, \dots, m_j, \dots, m_J\}$. On note $m_{\alpha_j, j}$ la fonction de croyance m_j affaiblie par un coefficient α_j . Alors la fonction $m_{\alpha_j, j}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} m_{\alpha_j, j}(A) = \alpha_j m_j(A) & \forall A \subset \Theta \\ m_{\alpha_j, j}(\Theta) = 1 - \alpha_j + \alpha_j m_j(\Theta). \end{cases} \quad (43)$$

La fonction de communalité $q_{\alpha_j, j}$, associée à $m_{\alpha_j, j}$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \forall A \subseteq \Theta \quad q_{\alpha_j, j}(A) &= \sum_{A \subseteq B} m_{\alpha_j, j}(B) \\ &= \sum_{\substack{A \subseteq B \\ B \neq \Theta}} (\alpha_j m_j(B)) + 1 - \alpha_j + \alpha_j m_j(\Theta) \\ &= \alpha_j \sum_{A \subseteq B} m_j(B) + 1 - \alpha_j \\ q_{\alpha_j, j}(A) &= \alpha_j (q_j(A) - 1) + 1 \end{aligned} \quad (44)$$

Fonction de croyance résultante de la combinaison

On peut alors écrire la combinaison des J sources d'information à l'aide des fonctions de communalité. Le résultat de cette fusion est noté q_α et peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q_\alpha(A) &= K_\alpha \times q_{\alpha_1, 1}(A) \times \dots \times q_{\alpha_j, j}(A) \times \dots \times q_{\alpha_J, J}(A) \quad \forall A \subseteq \Theta \\ &= K_\alpha \times \prod_{j=1}^J q_{\alpha_j, j}(A) \quad \forall A \subseteq \Theta \end{aligned} \quad (45)$$

où K_α représente le coefficient de normalisation de la combinaison. Ce coefficient s'exprime de la manière suivante (Cf. [13] page 42) :

$$K_\alpha = \frac{1}{-\sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} q_\alpha(B)}. \quad (46)$$

La masse résultante de la combinaison de Dempster (combinaison normalisée) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \forall A \subseteq \Theta \quad m_\alpha(A) &= \frac{1}{-\sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} q_\alpha(B)} \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} q_\alpha(B) \\ &= \frac{1}{-\sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} \prod_{j=1}^J q_{\alpha_j, j}(B)} \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} \prod_{j=1}^J q_{\alpha_j, j}(B) \\ m_\alpha(A) &= \frac{1}{-\sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} \prod_{j=1}^J [\alpha_j(q_j(B)-1)+1]} \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} \prod_{j=1}^J [\alpha_j(q_j(B)-1)+1]. \end{aligned} \quad (47)$$

Expression de la fonction de croyance résultante de la combinaison proposée

Soit m_c la fonction de croyance résultante de la combinaison proposée des J fonctions de croyance m_j . Cette fonction peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$m_c(A) = m_\cap(A) + w(A, m_1, \dots, m_J) K \quad \forall A \subseteq \Theta \quad (48)$$

où $m_\cap(\cdot)$ correspond à la masse issue de la combinaison conjonctive et où $w(A, m_1, \dots, m_J)$ est le poids associé au sous-ensemble A lors de la redistribution du conflit K . Cette équation (48) peut aussi s'écrire à l'aide de la fonction de communité. En effet, le résultat de la combinaison conjonctive peut s'écrire :

$$m_\cap(A) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} \prod_{j=1}^J q_j(B) \quad \forall A \subseteq \Theta. \quad (49)$$

La masse conflictuelle engendrée par cette combinaison conjonctive peut s'écrire :

$$K = 1 + \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} \prod_{j=1}^J q_j(B). \quad (50)$$

En égalant la masse issue de la combinaison de masses affaiblies m_α et l'équation (48), nous obtenons :

$$w(A, m_1, \dots, m_J) = \frac{(m_\alpha(A) - m_\cap(A))}{K}. \quad (51)$$

Ainsi, à partir de l'équation précédente et des équations (47), (49) et (50), nous pouvons alors déterminer les valeurs de poids de redistribution de la masse conflictuelle à partir des coefficients d'affaiblissement α_j et des jeux de masse m_j :

$$\forall A \subseteq \Theta \quad w(A, m_1, \dots, m_J) = \zeta \left[\frac{\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} \prod_{j=1}^J [\alpha_j(q_j(B)-1)+1]}{-\sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} \prod_{j=1}^J [\alpha_j(q_j(B)-1)+1]} - \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B-A|} \prod_{j=1}^J q_j(B) \right] \quad (52)$$

avec :

$$\zeta = \frac{1}{1 + \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{|B|} \prod_{j=1}^J q_j(B)}. \quad (53)$$

Références

- [1] “Numéro spécial : Fusion de données,” *Revue Traitement du Signal*, vol. 11, no. 6, 1994.
- [2] “Numéro spécial : Fusion de données,” *Revue Traitement du Signal*, vol. 14, no. 5, 1997.
- [3] I. Bloch, “Incertitude, imprécision et additivité en fusion de données : point de vue historique,” *Revue Traitement du Signal*, vol. 13, no. 4, pp. 267–288, 1996.
- [4] I. Bloch, “Information combination operators for data fusion : A comparative review with classification,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 26, no. 1, pp. 52–67, 1996.
- [5] A. Appriou, “Probabilités et incertitude en fusion de données multi-senseurs,” *Revue Scientifique et Technique de la Défense*, vol. 11, pp. 27–40, 1991.
- [6] I. Bloch and H. Maître, “Fusion de données en traitement d’images : Modèles d’informations et décisions,” *Revue Traitement du Signal*, vol. 11 (Numéro Spécial : Fusion de données), no. 6, pp. 435–446, 1994.
- [7] I. Bloch, “Some aspects of Dempster-Shafer evidence theory for classification of multi-modality medical images taking partial volume effect into account,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 17, pp. 905–919, 1996.
- [8] L. A. Zadeh, *On the Validity of Dempster’s Rule of Combination of Evidence*. Univ. of California, Berkeley, 1979.
- [9] R. Yager, “On the Dempster-Shafer framework and new combination rules,” *Information Sciences*, vol. 41, pp. 93–138, 1987.
- [10] D. Dubois and H. Prade, “Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures,” *Comput. Intell.*, vol. 4, pp. 244–264, 1988.
- [11] P. Smets, “The combination of evidence in the transferable belief model,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 5, pp. 447–458, 1990.
- [12] A. Dempster, “Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping,” *Annals of Mathematical Statistics*, vol. AMS-38, pp. 325–339, 1967.
- [13] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1976.
- [14] P. Smets, “What is Dempster-Shafer’s model?,” in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (R. Yager, M. Fedrizzi, and J. Kacprzyk, eds.), pp. 5–34, Wiley, 1994.
- [15] P. Smets and R. Kennes, “The transferable belief model,” *Artificial Intelligence*, vol. 66, no. 2, pp. 191–234, 1994.
- [16] P. Smets, “Belief functions : The disjunctive rule of combination and the generalized bayesian theorem,” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 9, pp. 1–35, 1993.

- [17] E. Lefevre, P. Vannoorenberghe, and O. Colot, "Using information criteria in Dempster-Shafer's basic belief assignment," in *Proceeding of Fuzz'ieee 99*, pp. 173–178, 1999.
- [18] P. Walley and S. Moral, "Upper probabilities based only on the likelihood function," *Journal of Royal Statistical Society, Serie B*, vol. 61, no. Part 4, pp. 831–847, 1999.
- [19] T. Denoeux, "A k-nearest neighbour classification rule based on Dempster-Shafer theory," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 25, no. 5, pp. 804–813, 1995.
- [20] L. M. Zouhal and T. Denoeux, "An evidence-theoretic k-NN rule with parameter optimization," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C*, vol. 28, no. 2, pp. 263–271, 1998.
- [21] T. Denoeux, "A neural network classifier based on Dempster-Shafer theory," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A*, vol. 30, no. 2, pp. 131–150, 2000.
- [22] T. Denoeux and L. M. Zouhal, "Handling possibilistic labels in pattern classification using evidential reasoning," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, no. 3, pp. 47–62, 2001.
- [23] D. Dubois and H. Prade, "On the unicity of Dempster rule of combination," *International Journal of Intelligent System*, vol. 1, pp. 133–142, 1986.
- [24] F. Klawonn and E. Schwecke, "On the axiomatic justification of Dempster's rule combination," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 7, pp. 469–478, 1992.
- [25] F. Voorbraak, "On the justification of Dempster's rule of combinations," *Artificial Intelligence*, vol. 48, pp. 171–197, 1991.
- [26] R. R. Yager, "Hedging in the Combination of Evidence," *Journal of Information and Optimization Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 73–81, 1983.
- [27] E. Lefevre, O. Colot, P. Vannoorenberghe, and D. de Brucq, "Contribution des mesures d'information à la modélisation crédibiliste des connaissances," *Revue Traitement du Signal*, vol. 17, no. 2, pp. 87–97, 2000.
- [28] S. Fabre, A. Appriou, and X. Briottet, "Presentation and description of two classification methods using data fusion based on sensor management," *Information Fusion*, vol. 2, pp. 49–71, 2001.
- [29] C. Royère, D. Gruyer, and V. Cherfaoui, "Identification d'objets par la combinaison d'experts à l'aide de la théorie de l'évidence," in *Rencontre Francophone sur la Logique Floue et Ses Applications LFA'2000*, pp. 237–244, Octobre 2000.
- [30] P. Smets, *Qualitative and Quantitative Practical Reasoning*, ch. The Alpha-Junctions : Combination Operators Applicable to Belief Functions., pp. 131–153. Berlin : Springer Verlag, Kruse R. and Nonengart A. and Ohlbach H. J. ed., 1997.

- [31] E. Lefevre, O. Colot, P. Vannoorenberghe, and D. de Brucq, "A generic framework for resolving the conflict in the combination of belief structures," in *Third International Conference on Information Fusion (FUSION'2000)*, pp. MOD4 11–18, July 2000.
- [32] P. Smets, "Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty," in *Uncertainty in Artificial Intelligence 5* (M. Henrion, R. D. Schachter, L. Kanal, and J. Lemmer, eds.), (Amsterdam), pp. 29–40, North-Holland, 1990.
- [33] D. Michie, D. Spiegelhalter, and C. T. (Eds.), *Machine Learning, Neural and Statistical Classification*. Ellis Horwood Serie in Artificial Intelligence, Chichester, U.K. : Ellis Horwood, 1994.
- [34] D. Dubois, M. Grabisch, H. Prade, and P. Smets, "Using the transferable belief model and a qualitative possibility theory approach on an illustrative example : The assessment of the value of a candidate," *International Journal of Intelligent Systems (To appear)*, 2001.