Autour des mécanismes de correction de fonctions de croyance

David Mercier

Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

Réunion GDR ISIS
- Avancées en Fusion de données -
11 février 2010

Introduction

Mécanismes de correction / d'ajustement

Agent *Ag*

Cherche la valeur d'une variable d'intérêt $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{\Omega}$

$\boldsymbol{m_S^{\Omega}}$

Source *S*

Fournit une information à *Ag* sur cette valeur - sous la forme $\boldsymbol{m_S^{\Omega}}$-

Introduction

Mécanismes de correction / d'ajustement

Agent Ag

Cherche la valeur d'une variable d'intérêt $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{\Omega}$

Connaissances sur S : fiabilité, prudence, honnêteté, …

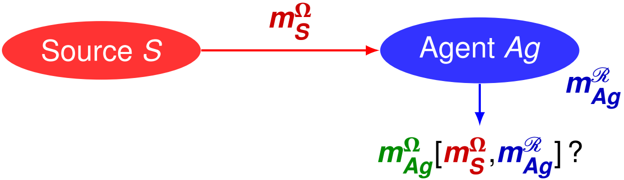
m_S^Ω

Source S

Fournit une information à Ag sur cette valeur - sous la forme m_S^Ω-

Introduction

Mécanismes de correction / d'ajustement



Definition

*Un mécanisme de correction est un mécanisme qui permet à un agent **Ag** de prendre en compte l'information fournie par une source **S** ainsi que sa méta-connaissance sur **S**.*

Plan

Plan

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Fonction de masse - basic belief assignment (bba) - Notations

$\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ *: un ensemble fini contenant les valeurs possibles d'une variable d'intérêt* $\boldsymbol{X}$.

Definition

L'information détenue par un agent ***Ag*** *au regard de la valeur prise par* $\boldsymbol{X}$*, étant donné un ensemble de de connaissances* ***EC****, peut être quantifiée par une* ***fonction de masse de croyance*** $m^{\Omega}_{Ag}[EC]$*, définie de* 2^{Ω} *dans* $[0,1]$*, par :*

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m^{\Omega}_{Ag}[EC](A) = 1 \ .$$

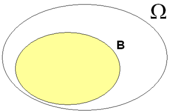
En l'absence d'ambiguïté, la notation peut être simplifiée en m^{Ω} *ou même* m*.*

Fonction de masse catégorique
Définitions

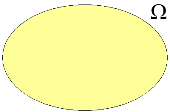
Élément focal de m : sous ensemble A de Ω tel que $m(A) > 0$;

Fonction de masse catégorique sur $B \subseteq \Omega$ est notée m_B et vérifie :

$$m_B(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Fonction de masse vide : la fonction de masse catégorique sur Ω (m_Ω)



Concepts de base

Règle de combinaison conjonctive (RCC) :

- Deux fonctions de masse distinctes et fiables m_1 et m_2 peuvent être combinées avec la RCC :

$$m_1 \circledcap m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Concepts de base

Règle de combinaison conjonctive (RCC) :

- Deux fonctions de masse distinctes et fiables m_1 et m_2 peuvent être combinées avec la RCC :

$$m_1 \textcircled{\cap} m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Marginalisation et extension vide sur un espace produit :

- Marginalisation de $m^{\Omega \times \Theta}$ sur Ω :

$$m^{\Omega \times \Theta \downarrow \Omega}(A) = \sum_{\{\mathrm{Proj}(B \downarrow \Omega) = A\}} m^{\Omega \times \Theta}(B)\ ,\ \forall A \subseteq \Omega\ .$$

- Extension vide de m^{Ω} sur $\Omega \times \Theta$:

$$m^{\Omega \uparrow \Omega \times \Theta}(B) = \begin{cases} m^{\Omega}(A) & \text{si } B = A \times \Theta,\ A \subseteq \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Concepts de base

Règle de combinaison conjonctive (RCC) :

- Deux fonctions de masse distinctes et fiables m_1 et m_2 peuvent être combinées avec la RCC :

$$m_1 \circledcap m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Marginalisation et extension vide sur un espace produit :

- Marginalisation de $m^{\Omega \times \Theta}$ sur Ω :

$$m^{\Omega \times \Theta \downarrow \Omega}(A) = \sum_{\{\mathrm{Proj}(B \downarrow \Omega) = A\}} m^{\Omega \times \Theta}(B)\ ,\ \forall A \subseteq \Omega\ .$$

- Extension vide de m^{Ω} sur $\Omega \times \Theta$:

$$m^{\Omega \uparrow \Omega \times \Theta}(B) = \begin{cases} m^{\Omega}(A) & \text{si } B = A \times \Theta,\ A \subseteq \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déconditionnement sur sur un espace produit :

- Déconditionnement de $m^{\Omega}[\theta]$ sur $\Omega \times \Theta$:

$$m^{\Omega}[\theta]^{\Uparrow \Omega \times \Theta}(A \times \theta \cup \Omega \times \overline{\theta}) = m^{\Omega}[\theta](A).$$

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Plan

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Mécanisme de correction

Exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

$\mathscr{R} = \{F, NF\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{F\}) = 1 - \alpha$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\mathscr{R}) = \alpha$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] = m_{\Omega}$ telle que $m_{\Omega}(\Omega) = 1$

Mécanisme de correction

Exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

$\mathscr{R} = \{F, NF\}$

$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}(\{F\}) = 1 - \alpha$

$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}(\mathscr{R}) = \alpha$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] =$ m_{Ω} telle que $m_{\Omega}(\Omega) = 1$

Calcul :

- $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\Omega}[\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{S}}^{\Omega}, \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}] = \left(m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \circledcap m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}$

Mécanisme de correction

Exemple : opération d'affaiblissement ou discounting (Shafer, 1976)

$$\text{Source } S \xrightarrow{\;\boldsymbol{m_S^\Omega}\;} \text{Agent } Ag$$

$$\mathscr{R} = \{F, NF\}$$

$$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{F\}) = 1 - \alpha$$

$$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\mathscr{R}) = \alpha$$

Source fiable (***F***) ou non fiable (***NF***), $\mathscr{R} = \{F, NF\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

- $m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}] = m_S^{\Omega} = m$
- $m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}] = m_{\Omega}$ telle que $m_{\Omega}(\Omega) = 1$

Calcul :

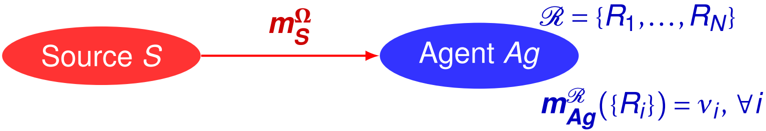
- $\boldsymbol{m_{Ag}^{\Omega}}[\boldsymbol{m_S^{\Omega}}, \boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}] = \left(m_{Ag}^{\Omega}[\{F\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \cap\!\!\!\!\bigcirc\, m_{Ag}^{\Omega}[\{NF\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \cap\!\!\!\!\bigcirc\, m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}}\right)^{\downarrow \Omega}$

Résultat (Smets, 1993) :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\alpha}m = (1 - \alpha) m + \alpha\, m_{\Omega}$

Une famille de mécanismes de correction

Contribution : une généralisation du modèle précédent



Généralisation :

- Source dans N états possibles R_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$.
- Interprétation état donnée par une transformation m_i de m :

  $$m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}] = m_i = f(m)$$

- $m_{Ag}^{\mathscr{R}}(\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}$, avec $\sum_{i=1}^{N} \nu_i = 1$.

Une famille de mécanismes de correction

Contribution : une généralisation du modèle précédent

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m_S^\Omega}} \text{Agent } Ag$$

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$\boldsymbol{m_{Ag}^{\mathscr{R}}}(\{R_i\}) = \nu_i, \ \forall i$

La connaissance de *Ag* peut être calculée :

- déconditionnement de $m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]$ sur l'espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- extension vide de $m_{Ag}^{\mathscr{R}}$ sur le même espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- application de la RCC ;
- marginalisation du résultat sur Ω.

Formellement :

$$m_{Ag}^{\Omega}[m_S^{\Omega}, m_{Ag}^{\mathscr{R}}] = \left(\text{\textcircled{$\cap$}}_{i=1}^{N} m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \ \text{\textcircled{$\cap$}}\ m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}.$$

Une famille de mécanismes de correction

Contribution : une généralisation du modèle précédent

$$\text{Source } S \xrightarrow{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{\Omega}}} \text{Agent } Ag$$

$\mathscr{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Ag}}^{\mathscr{R}}(\{R_i\}) = \nu_i, \; \forall i$

La connaissance de *Ag* peut être calculée :

- déconditionnement de $m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]$ sur l'espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- extension vide de $m_{Ag}^{\mathscr{R}}$ sur le même espace produit $\Omega \times \mathscr{R}$;
- application de la RCC ;
- marginalisation du résultat sur Ω.

Formellement :

$$m_{Ag}^{\Omega}[m_S^{\Omega}, m_{Ag}^{\mathscr{R}}] = \left(\textcircled{\cap}_{i=1}^{N} m_{Ag}^{\Omega}[\{R_i\}]^{\Uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \textcircled{\cap} m_{Ag}^{\mathscr{R} \uparrow \Omega \times \mathscr{R}} \right)^{\downarrow \Omega}.$$

Résultat, noté ${}^{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{m}$, ne dépend que des m_i et ν_i :

- $m_{Ag}^{\Omega} = {}^{\nu}m = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \, m_i$.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Cas particulier de cette famille

Contribution : nouvelles interprétations et justifications

Le *de-discounting* (Denœux and Smets, 2006) :

- $m = \frac{{}^{\alpha}m - \alpha\, m_{\Omega}}{1-\alpha}$, avec $\alpha \in [0, m(\Omega)]$. Permet de **renforcer** une information.

Cas particulier de cette famille

Contribution : nouvelles interprétations et justifications

Le *de-discounting* (Denœux and Smets, 2006) :

- $m = \frac{{}^{\alpha}m - \alpha\, m_\Omega}{1-\alpha}$, avec $\alpha \in [0, m(\Omega)]$. Permet de **renforcer** une information.

L'*affaiblissement étendu* (Zhu and Basir, 2004) :

- Transformation 1 :

  $${}^{\alpha}m = (1-\alpha)m + \alpha\, m_\Omega, \text{ avec } \alpha \in [\frac{-m_S^\Omega(\Omega)}{1-m_S^\Omega(\Omega)}, 1].$$

  Permet d'**affaiblir** ou **renforcer** une information.
- Transformation 2 :

  $$\begin{cases} {}^{\alpha}m(\overline{A}) = (\alpha-1)m(A) & \text{if } A \subset \Omega, \\ {}^{\alpha}m(\Omega) = (\alpha-1)m(\Omega) + 2 - \alpha & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ avec}$$

  $\alpha \in [1, 1 + \frac{1}{1-m(\Omega)}]$.

  Permet de **contredire** une information.
- appliqué avec succès mais souffre d'un manque de justification.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Cas particuliers de cette famille

TABLE: Interprétations conduisant, avec une reparamétrisation, à des mécanismes connus.

Interprétations		Opération
$m_1 = m_\Omega$	$m_2 = m$	affaiblissement
$m_1 = m$	$m_2 = {}^{tr}m$	de-discounting
$m_1 = m_\Omega$	$m_2 = {}^{tr}m$	affaiblissement étendu (1)
$m_1 = \overline{{}^{tr}m}$	$m_2 = m_\Omega$	affaiblissement étendu (2)

Avec ${}^{tr}m$: fonction de masse *m totalement renforcé*

$$
{}^{tr}m(A) = \begin{cases} \frac{m(A)}{1-m(\Omega)} & \forall A \subset \Omega, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

Et : $\overline{m}(A) = m(\overline{A}), \forall A \subseteq \Omega$.

Plan

Plan

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Application postale : schémas de fusion

- Trois lecteurs d'adresses postales (**PAR**) ;
- Chacun fournit une information au regard de l'adresse située sur un courrier.

Schéma *classique* de fusion

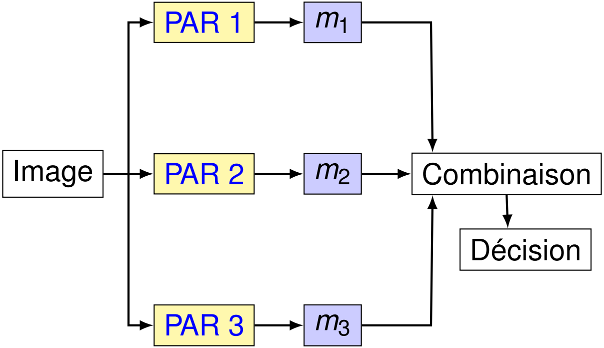
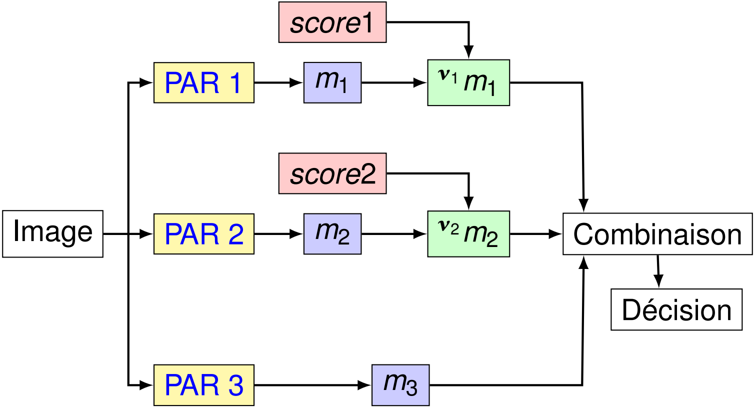


Schéma étendu



Correction des informations fournies par un score

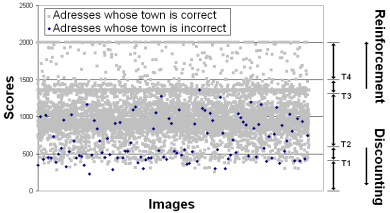


FIGURE: Scores fournis et justesses des adresses fournies par le lecteur PAR 1 au regard d'images appartenant à un ensemble d'apprentissage.

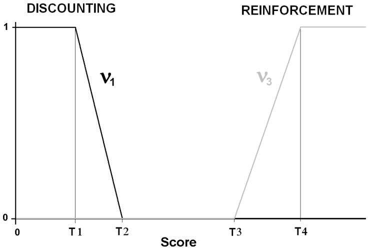


FIGURE: Paramètres de correction choisis en fonction du score fourni (${}^{\nu}m = \nu_1\, m_\Omega + \nu_2\, m + \nu_3\, {}^{tr}m$, $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1$).

Résultats

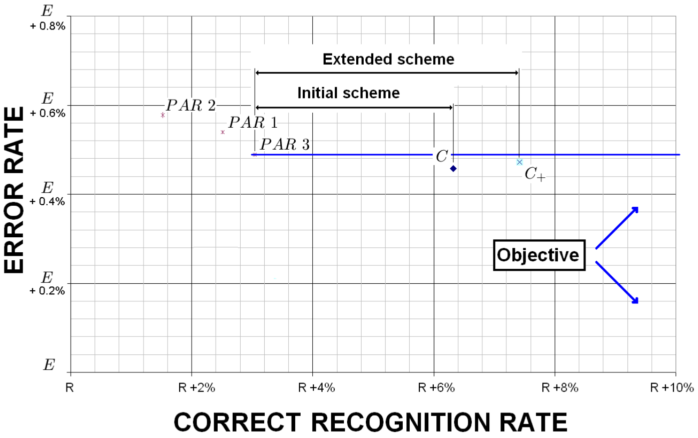


FIGURE: Performances des lecteurs et des combinaisons au regard de la reconnaissance de la ville.

Plan

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Conclusion et perspectives

Conclusions

- Liens entre affaiblissement, de-discounting, affaiblissement étendu ont été clarifiés ;
- Ces mécanismes sont des cas particuliers d'une même famille de corrections de fonctions de croyance.
- Point clé de la justification :

  La source d'information peut être dans différents états (fiable, non fiable, trop prudente, ...) dont l'interprétation est donnée par une transformation de croyance.
- Fusion de données : introduction d'une manière de combiner des scores avec des décisions.

Conclusion et perspectives

Conclusions

- Liens entre affaiblissement, de-discounting, affaiblissement étendu ont été clarifiés ;
- Ces mécanismes sont des cas particuliers d'une même famille de corrections de fonctions de croyance.
- Point clé de la justification :

  La source d'information peut être dans différents états (fiable, non fiable, trop prudente, ...) dont l'interprétation est donnée par une transformation de croyance.

- Fusion de données : introduction d'une manière de combiner des scores avec des décisions.

Travaux en cours

- Contextualisation de cette famille.
- Apprentissage automatique des coefficients v_i à partir de données étiquetées.

Modèle contextuel

$\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$

$m_{Ag}^{\mathcal{R}}[\{\omega_k\}](\{R_i\}) = \nu_i, \; \forall i$

Fin

Merci de votre attention

Bibliographie

D. Mercier, T. Denoeux, M.-H. Masson.
Belief function correction mechanisms
Studies in Fuzziness and Soft Computing,
B. Bouchon-Meunier et al. (Eds.), Vol. 249, à paraître en 2010.

UNIVERSITÉ D'ARTOIS